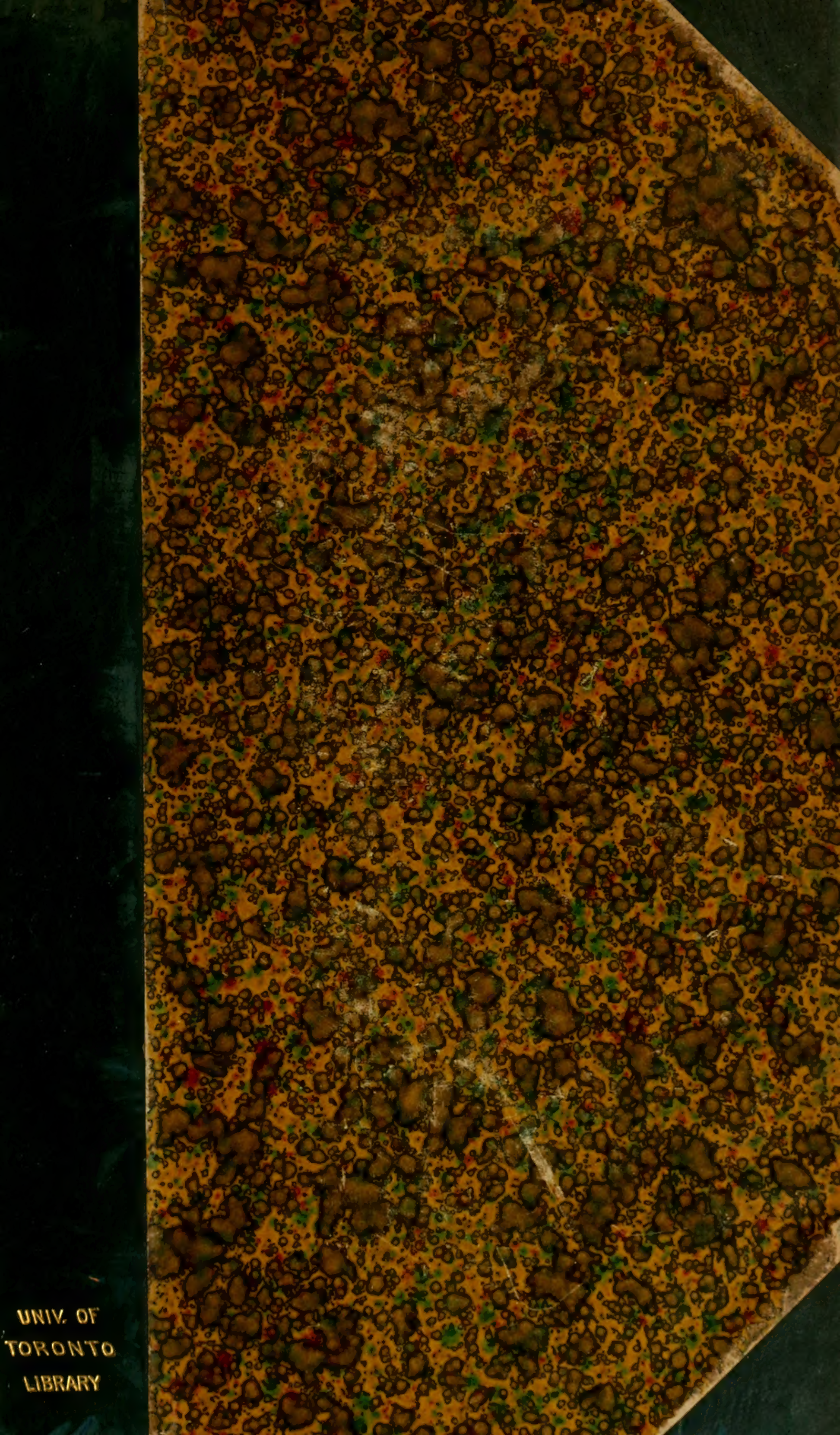
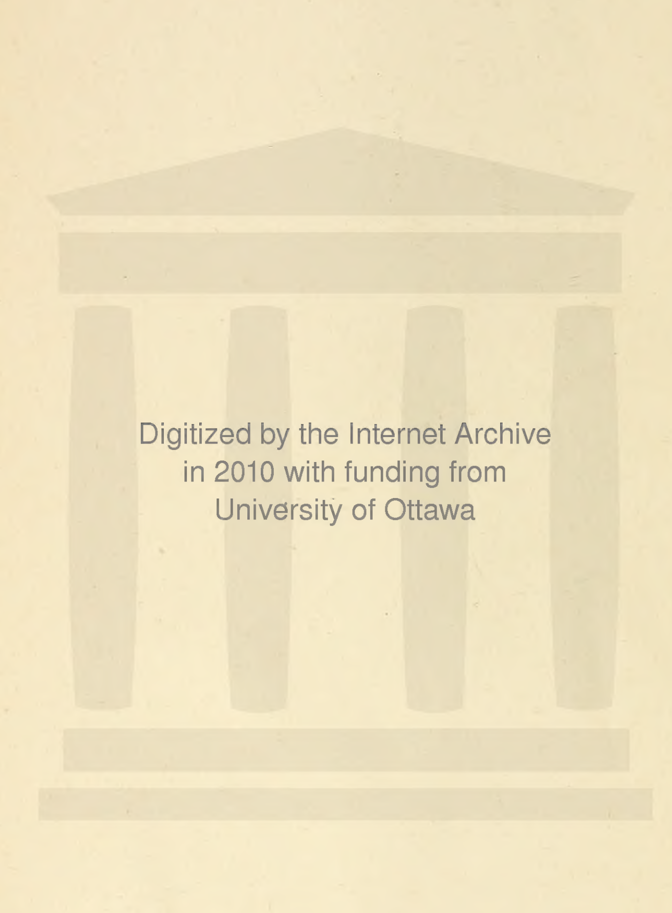

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1898


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. C.-A. LAISANT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. X. ANTOMARI,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CARNOT.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Gerono, Prouhet, Bourget, et MM. Brisse et Rouché.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DIX-SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

Résultat.

Après examen des Mémoires adressés à la Rédaction pour le deuxième Concours de 1897, le prix a été décerné à M. E. DUPORCQ. Son Mémoire paraîtra dans l'un de nos prochains numéros.

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898.

Renseignements bibliographiques complémentaires.

A la liste des travaux à consulter, publiée dans le numéro de novembre 1897, il y a lieu d'ajouter ceux qui suivent :

P. DUHEM. — De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire (*Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7 ; session de 1896). — Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*).

[C2k][H2a]

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME RELATIF A L'INTÉGRATION D'EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES, SOUS FORME FINIE;

Par M. Julius PETERSEN, de Copenhague.

Extrait des *Göttinger Nachrichten*, 1878, n° 3.

Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.

Relativement à l'intégration d'une expression différentielle algébrique se présente la question suivante :

Quelle forme une telle expression doit-elle avoir, pour qu'il soit possible de représenter son intégrale au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques, sous forme finie?

Cette question, résolue par Abel dans des cas particuliers, est, elle-même, un cas particulier d'une question plus générale.

En premier lieu, au lieu de la fonction logarithmique, on peut se donner un nombre fini, d'ailleurs aussi grand que l'on voudra, de fonctions transcendantes, qui, liées entre elles et à des fonctions algébriques, devront être employées à la représentation de l'intégrale.

Dans cette hypothèse générale, on peut également parler d'une représentation sous forme finie, pourvu que chacune des fonctions n'entre qu'un nombre fini de fois

dans l'expression de l'intégrale. Relativement aux fonctions transcendantes, nous nous en tiendrons à l'hypothèse qu'elles sont définies par des équations différentielles algébriques du premier ordre pour lesquelles il existe un multiplicateur algébrique.

En second lieu, au lieu de la fonction intégrale précitée, l'on peut supposer qu'on demande l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, ce qui conduit à la question suivante : *Les variables x, y sont liées entre elles par une équation différentielle algébrique du premier ordre; sous quelle condition est-il alors possible de donner à l'intégrale générale de cette équation différentielle la forme $u = f(x, y, c) = 0$, où c désigne la constante d'intégration, tandis que u peut être représenté sous forme finie, au moyen de fonctions algébriques et d'un nombre fini de fonctions transcendantes données du type précité.*

Cette question, étendue au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes, trouve sa réponse dans le théorème que nous allons démontrer.

1. Une fonction algébrique d'un ou de plusieurs arguments sera définie comme racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières des arguments.

Les dérivées d'une fonction algébrique sont encore des fonctions algébriques des arguments.

Nous nommerons fonctions *hyperalgébriques* des fonctions telles que leurs dérivées soient des fonctions algébriques des arguments. Telles sont, par exemple, $\log x$, $\arcsin x$, les intégrales elliptiques, etc. Les fonctions algébriques sont donc comprises, comme cas particulier, parmi les fonctions hyperalgébriques.

2. Toute équation différentielle du premier ordre à une variable dépendante ω et à n variables indépendantes v_1, v_2, ..., v_n peut être ramenée à la forme

$$(1) \qquad d\omega + N_1\,dv_1 + N_2\,dv_2 + \ldots + N_n\,dv_n = 0,$$

où N_1, N_2, ..., N_n désignent des fonctions *algébriques* des grandeurs v_1, v_2, ..., v_n et ω, qui satisfont aux conditions d'intégrabilité connues.

L'équation (1) détermine, en général, ω comme fonction transcendante des n arguments v_1, v_2, ..., v_n.

Si les grandeurs N dépendent explicitement seulement des grandeurs v, mais non de ω, alors ω est une fonction hyperalgébrique des grandeurs v.

Nous désignerons par φ un multiplicateur du premier membre de l'équation (1), et par U la fonction de v_1, v_2, ..., v_n, ω qui satisfait aux équations

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial \omega} = \varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial v_1} = \varphi N_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial v_n} = \varphi N_n.$$

Tandis qu'une partie des recherches suivantes sont valables d'une manière générale, dans les nos 7 et suivants, nous ferons l'hypothèse particulière que, parmi les multiplicateurs en nombre infini, il en existe *un* qui soit une fonction *algébrique* des grandeurs v_1, v_2, ..., v_n et ω.

3. Si les variables v_1, v_2, ..., v_n, dont dépend la fonction transcendante ω considérée dans le no 2, sont des fonctions algébriques d'autres variables w_1, w_2, ..., w_m, que l'on doit regarder comme variables indépendantes au lieu des grandeurs v, la transcendante ω devient une fonction des grandeurs w.

Une expression qui renferme seulement des fonctions algébriques d'une ou plusieurs grandeurs ω et de leurs

arguments w sera dite une fonction transcendante des grandeurs w *du premier échelon.*

Une fonction transcendante du premier échelon, dont les arguments w sont eux-mêmes des fonctions transcendantes du premier échelon par rapport à d'autres variables (qui doivent être regardées comme variables indépendantes, au lieu des grandeurs w), sera dite une fonction transcendante du *second échelon* par rapport à ces nouveaux arguments.

On peut, de cette façon, définir des fonctions transcendantes d'un échelon aussi élevé que l'on veut.

Lorsque l'on considère une telle fonction, on peut désormais supposer : 1° qu'aucune des transcendantes en question ne soit réductible à un échelon moins élevé, c'est-à-dire qu'aucune de ces transcendantes ne soit une fonction algébrique de transcendantes du même type qui soient toutes d'échelon moins élevé que cette transcendante même ; et 2° que le nombre des transcendantes de l'échelon le plus élevé soit aussi petit que possible, c'est-à-dire qu'entre ces dernières et les transcendantes d'échelon moins élevé aucune équation algébrique ne puisse avoir lieu. En effet, si les hypothèses définies (1° et 2°) n'étaient pas vérifiées, l'expression considérée serait réductible à une autre plus simple, pour laquelle ces hypothèses seraient alors vérifiées.

De ce qui précède, il s'ensuit que toute équation algébrique, entre les transcendantes précitées d'échelon le plus élevé et d'autres transcendantes d'échelon moins élevé, doit être identiquement vérifiée par rapport aux premières. En effet, si tel n'était pas le cas, une telle équation pourrait servir à éliminer de l'expression l'une des transcendantes et, par suite, à simplifier cette expression.

4. Soit

$$(3) \qquad dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_k\,dx_k$$

une équation différentielle *algébrique* donnée du premier ordre. Les grandeurs P sont, par conséquent, des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et y qui satisfont aux conditions d'intégrabilité. Nous supposerons qu'il est possible de mettre l'intégrale générale de cette équation différentielle sous la forme

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) = \text{const.},$$

où f est une fonction algébrique de ses arguments et où les grandeurs ω sont des fonctions transcendantes d'échelon quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et de y. On posera maintenant

$$(4) \qquad u = F(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, \omega),$$

en désignant une des transcendantes de l'échelon le plus élevé par ω, et, en désignant par le signe F toute autre dépendance relative aux arguments x et y, dépendance de ces seuls arguments en ce sens que les autres grandeurs ω dépendent de y et des grandeurs x (F est, par suite, une fonction algébrique par rapport à ω).

Ici, toutefois, il est fait exception du cas pour lequel on a

$$(5) \qquad u = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1,$$

où u_1 est une fonction algébrique et où $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ sont des fonctions hyperalgébriques, tandis que, parmi les arguments de ces fonctions, il peut se présenter des fonctions transcendantes de l'échelon secondaire (le plus élevé, moins un).

Dans ce cas d'exception, ω désignera l'une des transcendantes en question, d'échelon secondaire, de sorte

que u_1 est une fonction algébrique de ω, et que Ψ_1, Ψ_2, ... en sont des fonctions hyperalgébriques. Par conséquent, dans tous les cas, ω peut se présenter dans $\frac{\partial u}{\partial \omega}$ seulement algébriquement et à côté de transcendantes du même échelon ou d'échelons inférieurs.

Dans les différentiations qui suivent, par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ on entendra toujours $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, en attribuant au symbole ∂ la signification suivante : c'est une dérivée partielle par rapport à une certaine variable, *en tant que celle-ci se trouve explicitement parmi les arguments de la fonction;* nous écrirons, par conséquent, par exemple

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dx_i}.$$

Les conditions pour que l'équation différentielle (3) soit intégrée d'une manière générale par l'équation (4) sont

$$(6)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dx_i} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dy}\right) P_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array} \right.$$

Par rapport à la transcendante ω, ces équations sont des équations algébriques; par suite des hypothèses posées au n° 3, ces équations doivent donc être identiquement vérifiées. On peut, par conséquent, différentier par rapport à ω et l'on obtient

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial \omega} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}\dfrac{d\omega}{dx_i} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{\partial}{\partial \omega}\left(\dfrac{d\omega}{dx_i}\right) \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial \omega} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{\partial}{\partial \omega}\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right)\right] P_i = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions le premier membre de cette équation par α, fonction de x_1, x_2, ... et de y, qui devra être

déterminée plus tard, et posons

$$\beta = \alpha \frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

On a alors

$$\frac{d\beta}{dx_i} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \frac{d\omega}{dx_i} + \frac{\partial^2 u}{dx_i \, \partial \omega} \right) + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\alpha}{dx_i},$$

$$\frac{d\beta}{dy} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \frac{d\omega}{dy} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial \omega} \right) + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\alpha}{dy}.$$

Si l'on détermine maintenant la fonction α au moyen des équations

$$(8) \qquad \frac{d\alpha}{dx_i} = \alpha \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{d\omega}{dx_i} \right), \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{d\omega}{dy} \right)$$

(la possibilité de cette détermination sera démontrée plus tard), on pourra écrire les équations (7) comme il suit

$$(9) \qquad \frac{d\beta}{dx_i} + \frac{d\beta}{dy} P_i = 0,$$

c'est-à-dire, lorsque nous remplaçons P_i par $\frac{dy}{dx_i}$,

$$\beta = \text{const.}$$

De là résulte que, lorsque α vérifie les équations (8), $\beta = c$ est, soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale de (3).

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe toujours une infinité de fonctions α qui vérifient les équations (8). Posons, à cet effet, $\alpha = \frac{1}{\varphi}$, et nous obtiendrons, x pouvant désigner aussi bien x_i que y,

$$(10) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\varphi \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{d\omega}{dx} \right)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\varphi \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \omega}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \ldots \right).$$

Mais, par suite de l'équation (1),

$$\frac{\partial\omega}{\partial v_1} = -N_1, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial v_2} = -N_2, \qquad \dots$$

et, par conséquent, puisque les grandeurs $\frac{dv}{dx}$ ne renferment pas ω,

$$0 = \frac{d\varphi}{dx} - \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial\omega}\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial N_2}{\partial\omega}\frac{dv_2}{dx} + \dots\right).$$

Cette équation est satisfaite lorsque φ est un multiplicateur de (1); dans ce cas, en effet, l'on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{dv_2}{dx} + \dots,$$

où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v_i} = \frac{\partial(N_i\varphi)}{\partial\omega} = N_i\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \varphi\frac{\partial N_i}{\partial\omega},$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + N_1\frac{dv_1}{dx} + N_2\frac{dv_2}{dx} + \dots\right) + \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial\omega}\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial N_2}{\partial\omega}\frac{dv_2}{dx} + \dots\right).$$

Or, comme la première parenthèse dans le second terme de la précédente formule est identiquement nulle, on a

$$\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial\omega}\frac{dv_1}{dx} + \frac{\partial N_2}{\partial\omega}\frac{dv_2}{dx} + \dots\right) = 0.$$

Par conséquent, si φ *est un multiplicateur de* (1), $\alpha = \frac{1}{\varphi}$ *satisfait aux équations* (8).

On a donc ainsi démontré le théorème suivant :

Lorsque l'équation différentielle à une variable dépendante

$$dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \dots + P_k\,dx_k$$

a pour intégrale

$$u = F(x_1, x_2, \dots, y, \omega) = c,$$

ou bien

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1 = c,$$

où ω *est une des transcendantes de l'échelon le plus élevé, ou, dans le deuxième cas, de l'échelon secondaire, alors*

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = c\varphi \tag{10}$$

est, soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale.

5. Les équations de condition (6) sont des identités par rapport à ω. Les dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ renferment les constantes d'intégration de la fonction, non explicitement, mais seulement en ce sens que les dérivées sont des fonctions données de ω.

On peut donc attribuer aux constantes renfermées dans ω *une valeur quelconque, sans que, pour cela,* $u = c$ *cesse d'être une équation intégrale de* (3).

6. Si *u n'est pas* de la forme

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1,$$

et si (10) n'est pas une identité, on a deux formes de l'équation intégrale

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \omega} = c_1 \qquad \text{et} \qquad u = c;$$

on doit, par conséquent, avoir

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \omega} = \Psi(u), \tag{11}$$

où Ψ est une fonction inconnue. De là résulte que l'on a

$$\int \frac{du}{\Psi(u)} = \int \varphi \, d\omega. \tag{12}$$

Le cas où (10) est une identité est compris dans ce cas, $\Psi(u)$ étant alors une constante. Dans $\int \varphi\, d\omega$, ω seul doit être pris comme variable.

La grandeur, dans le premier membre, est une fonction de u. Soit (ω) la valeur de ω que nous pouvons tirer de $u = c$; on a

$$(13)\qquad \int_c^u \frac{du}{\Psi(u)} = \int_{\omega}^{(\omega)} \varphi\, d\omega,$$

en sorte que

$$(14)\qquad \int_{(\omega)}^{\omega} \varphi\, d\omega = c$$

est une nouvelle équation intégrale. La grandeur (ω) ne renferme pas ω, mais est une fonction algébrique des transcendantes restantes.

On obtient, par intégration de (1),

$$(15)\qquad \int_a^{\omega} \varphi\, d\omega + \int_b^{v_1} [\varphi X_1]_a\, dv_1 + \int_c^{v_2} [\varphi X_2]_{a,b}\, dv_2 + \ldots = 0,$$

où a, b, c, ... sont des constantes quelconques et où $[\varphi X_k]_{a,b,\ldots}$ indique que l'on remplace ω par a, v_1 par b, et ainsi de suite. Par suite de cette équation, l'équation intégrale (14) se transforme en

$$(16)\qquad \int_a^{(\omega)} \varphi\, d\omega + \int_b^{v_1} [\varphi X_1]_a\, dv_1 + \ldots = \text{const.}$$

7. Maintenant, nous admettrons ici une restriction, en supposant que, parmi les multiplicateurs φ de l'équation différentielle (1), il y en ait un qui soit une fonction algébrique de ω, v_1, v_2, ... (cette hypothèse s'applique aussi aux équations différentielles qui définissent les transcendantes restantes ω_i). Dans l'équation qui

determine ω.

$$U = c.$$

U est alors une fonction hyperalgébrique de $\omega, v_1, v_2, \ldots$. Comme l'équation intégrale (16) est formée au moyen de $U = c$, lorsque l'on remplace ω par (ω) (le fait que cette substitution fournisse une nouvelle forme de l'équation intégrale est aussi chose évidente), son premier membre est une fonction hyperalgébrique de (ω), $v_1, v_2, \ldots$; et ω ne se présente pas parmi ces grandeurs.

On peut donner, par conséquent, à l'équation intégrale, dans tous les cas, la forme

$$\Psi = \text{const.} \tag{17}$$

où Ψ est une fonction hyperalgébrique de ses arguments [la forme (5) est aussi évidemment renfermée dans (17)]. Maintenant, si ω_i est une des transcendantes d'échelon le plus élevé, comprises sous le signe fonctionnel Ψ, on a dans la relation

$$\frac{1}{\varphi_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega_i} = c_i$$

soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale. La dernière alternative n'est pas possible car, dans cette équation, il ne se présente aucune nouvelle transcendante, ni ω non plus, tandis que l'on avait supposé qu'il est impossible de diminuer le nombre de transcendantes d'échelon le plus élevé se présentant dans $u = c$. Nous devons donc avoir identiquement

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \omega_i} = c_i \varphi_i \tag{18}$$

et, par conséquent,

$$\Psi = c_i \int_a^{\omega_i} \varphi_i \, d\omega_i + [\Psi]_{\omega_i = a}, \tag{19}$$

relation où a est une constante quelconque. Ici l'inté-

grale, au moyen de l'équation qui détermine ω_i, peut être transformée en $[U_i]_{\omega_i = a}$. Et u conserve sa forme

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots.$$

Nous en concluons que u ne peut avoir sa forme la plus simple tant qu'il se présente des transcendantes sous les signes des fonctions hyperalgébriques.

Par conséquent :

Lorsqu'une équation différentielle algébrique du premier ordre à une variable dépendante possède l'intégrale $u = c$, où u est exprimable au moyen d'une superposition quelconque de transcendantes du type précité, alors, sous sa forme la plus simple, u est égal à une somme de fonctions hyperalgébriques du premier échelon.

8. Jusqu'ici nous avons seulement envisagé la forme de l'équation intégrale $u = c$; mais nous pouvons démontrer que le cas où l'équation intégrale de (3) a la forme

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, y, c) = 0$$

peut se ramener au cas traité.

En effet, si u est une fonction hyperalgébrique, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lorsque c ne s'évanouit pas identiquement de cette équation, celle-ci est une nouvelle forme de l'équation intégrale; mais u n'aurait pas alors sa forme la plus simple. Mais si c s'évanouit identiquement de cette équation, (3) est aussi vérifiée pour $u = c_1$, et alors, si l'on attribue à c une valeur arbitraire, on retombe sur la forme traitée précédemment.

Au contraire, si

$$u = F(x_1, x_2, \ldots, y, \omega, c) = 0$$

est une fonction algébrique de ω, tirons de l'équation $u = 0$ la valeur $\omega = (\omega)$ et portons cette valeur dans l'équation $U = 0$ qui détermine ω. Nous obtenons ainsi une nouvelle forme de l'équation intégrale

$$[U]_{\omega=(\omega)} = 0.$$

Maintenant comme U est une fonction hyperalgébrique nous voyons, comme dans le premier cas, que

$$[U]_{\omega=(\omega)} = \text{const.}$$

satisfait également à l'équation donnée.

9. L'équation donnée était

$$dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots.$$

De $u = c$ nous tirons

$$(20) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots = 0.$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial y}$ est un multiplicateur et, au moyen de la forme trouvée pour u, nous voyons que ce multiplicateur est une fonction algébrique. Nous pouvons, en outre, démontrer qu'une certaine puissance de ce multiplicateur est une fonction rationnelle des grandeurs x, P et y.

En effet, soit φ ce multiplicateur; on a

$$(21) \qquad \frac{d\varphi}{dx_i} + P_i\frac{d\varphi}{dy} + \varphi\frac{dP_i}{dy} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

d'autre part, soit

$$(22) \qquad V = \varphi^n + A_1\varphi^{n-1} + A_2\varphi^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

l'équation algébrique *irréductible* à laquelle satisfait φ.

et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, y, P_1, P_2, \ldots$.

Des deux équations on tire

$$(23) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial V}{\partial y} - \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0.$$

Cette équation a une racine commune avec (22); par conséquent, toutes les racines de l'équation (22) satisfont en même temps aux équations (23); par suite, toutes les racines $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des multiplicateurs.

Si l'on observe maintenant que

$$(24) \qquad A_n = \pm \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$$

est une fonction rationnelle de

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, y, P_1, P_2, \ldots, P_k$$

et que $\sqrt[n]{A_n}$ substitué à φ vérifie les équations (21), on obtient

$$(25) \qquad \varphi \sqrt[n]{A_n}.$$

Pour trouver le multiplicateur, on doit, par suite, rechercher si les équations

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial A}{\partial y} + n A \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0$$

ont, pour une valeur numérique entière de n, une intégrale particulière qui soit une fonction rationnelle des grandeurs x, P et y.

10. Lorsque l'équation (3) n'a aucun multiplicateur algébrique, son intégration sous forme finie, au moyen des transcendantes définies, n'est pas possible. Nous voulons rechercher s'il n'y a pas alors un multiplicateur qui soit exprimable par cesdites transcendantes.

Donnons au multiplicateur la forme

$$e^{\lambda}:$$

nous devons avoir

$$(26) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0.$$

Ces équations doivent être identiques par rapport à ω. Différentions par rapport à ω; alors le dernier terme disparait et nous obtenons des équations qui coïncident, quant à leur forme, avec les équations (7), avec cette seule différence que λ remplace u. Nous pouvons donc en conclure que

$$(27) \qquad \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = c$$

est, soit une identité, soit une intégrale de l'équation différentielle donnée. Dans ce dernier cas, ainsi que nous l'avons déjà démontré, l'équation différentielle aurait un multiplicateur algébrique. Dans le premier cas, nous avons identiquement

$$(28) \qquad \lambda = c \int \varphi \, d\omega,$$

et nous pouvons alors, comme précédemment, opérer la réduction au moyen de l'équation qui détermine ω.

Le multiplicateur, par conséquent, doit avoir la forme

$$(29) \qquad e^{\lambda} = e^{\psi_1 + \psi_2 \cdots},$$

où les fonctions ψ sont des fonctions hyperalgébriques du premier échelon.

Un exemple est fourni par l'équation différentielle linéaire.

11. En vue de la simplicité nous avons supposé que les grandeurs P données sont des fonctions algébriques

de y et des grandeurs x. Supposons maintenant que les grandeurs P soient des fonctions transcendantes d'échelon quelconque; nos développements n'en restent pas moins valables, si nous remplaçons partout les fonctions algébriques de x, y par des fonctions algébriques de x, y et de P.

12. Comme application simple du théorème général démontré dans ce qui précède, nous avons ce qui suit :

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des fonctions algébriques de x qui ne sont pas les dérivées de fonctions algébriques. Si l'on introduit alors les fonctions

$$\Phi_1(x) = \int^x P_1\,dx,$$

$$\Phi_2(x) = \int^x P_2\,dx, \quad \ldots, \quad \Phi_m(x) = \int^x P_m\,dx,$$

comme transcendantes, il est impossible d'exprimer l'intégrale

$$\int^x P\,dx,$$

où P désigne une fonction algébrique de x, sous forme finie au moyen de fonctions algébriques, de fonctions Φ et de leurs fonctions inverses, à moins que l'on n'ait

$$\int P\,dx = \sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu}(x_{\mu,\nu}) + X, \tag{30}$$

où $x_{\mu,\nu}$ et X désignent des fonctions algébriques de x.

Un cas très particulier de ces fonctions Φ est présenté par le *logarithme*.

Il est possible d'intégrer une différentielle algébrique au moyen de fonctions algébriques et des transcendantes élémentaires ($\log x$, a^x, $\sin x$, $\arc \sin x$, etc.)

sous forme finie dans le seul et unique cas où l'on a

$$(31) \qquad \int \mathrm{P}\,dx = \sum c_\nu \log x_\nu + \mathrm{X},$$

x_ν et X *désignant des fonctions algébriques*. On démontre aisément que *ces fonctions algébriques peuvent s'exprimer rationnellement en x et* P. En effet, elles peuvent en tout cas s'exprimer rationnellement au moyen de x, P et de la racine y_1 d'une équation algébrique *irréductible* dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de P. En différentiant (31), on obtient une équation qui est vérifiée par y_1 et, par suite, par les autres racines $y_2, \ldots, y_k$ de l'équation irréductible. On peut donc, dans l'expression de $\int \mathrm{P}\,dx$, remplacer y_1 par chaque autre valeur de y. En additionnant les équations ainsi obtenues, on trouve une nouvelle expression pour $\int \mathrm{P}\,dx$, où les grandeurs y entrent symétriquement. Les fonctions symétriques des grandeurs y peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de x et de P.

Si l'on introduisait les intégrales elliptiques Π et leurs fonctions inverses, il pourrait se présenter dans l'expression $\int \mathrm{P}\,dx$ des termes de la forme

$$\sum c_k \Pi(x_k).$$

C'est à peu près sous cette forme qu'Abel a, dans une Lettre à Legendre (*Œuvres complètes*, t. II, édition Sylow et Lie, p. 275), exprimé ce théorème, avec cette restriction toutefois qu'il ne considère que les transcendantes de premier échelon et non les fonctions inverses. On ne trouve aucune démonstration du théorème dans les Œuvres d'Abel : mais M. Sylow m'a appris qu'il

existait une démonstration dans les papiers laissés par Abel [1].

Une partie des recherches qui précèdent a été publiée en 1876 dans un Mémoire de l'auteur intitulé : *Om Integralregningens Transcendenter* (Journal de M. Zeuthen, 3e série, t. I, p. 1 à 9).

NOTE FINALE DE L'AUTEUR (1897).

L'Université de Copenhague avait mis au concours, comme question de prix, l'extension des méthodes et théorèmes de mon Mémoire aux équations d'ordres supérieurs. Le prix fut obtenu par M. E. Schou, qui est parvenu à des résultats bien remarquables.

Comme une partie de son Travail est traduite en français et comme mon Mémoire des *Göttinger Nachrichten* est très peu connu en France, la rédaction des *Nouvelles Annales* a trouvé qu'une traduction française de ce Mémoire était désirable, et a eu la bonté de m'en offrir la publication. Naturellement, j'ai accepte avec gratitude cette offre si honorable. Je tiens aussi à adresser tous mes remercîments à M. Laugel pour la traduction dont il a bien voulu se charger.

JULIUS PETERSEN.

---

[1] Les mauuscrits laissés par Abel se trouvent maintenant dans l'édition Sylow, Lie (1881). On y voit qu'Abel a démontré qu'une relation algébrique entre les intégrales $\int y\,dx$, où y est algébrique, et des logarithmes de fonctions algébriques, doit être linéaire à coefficients constants; mais il semble qu'il n'a pas réussi à démontrer la formule

$$\int y\,dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \ldots.$$

Il dit à ce sujet, dans la Lettre à Legendre (t. II, p. 278): ..., mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais; je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de la forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x.

[K20e]

SUR LA RÈGLE DES ANALOGIES DE M. LEMOINE;

PAR M. CHARLES MICHEL,
Élève à l'École Normale supérieure.

On doit à M. Émile Lemoine (¹) la découverte d'un remarquable principe général concernant les analogies que présentent entre elles les relations métriques entre les segments et les angles qu'on peut déduire géométriquement d'un triangle. Il ne me semble pas qu'on en ait encore donné un énoncé précis et une démonstration rigoureuse.

M. Lemoine a cru pouvoir donner une raison intuitive de son principe en s'appuyant sur la remarque suivante :

Si dans une relation entre des segments et des angles, déduits d'un triangle, on remplace les nombres qui les mesurent par leurs valeurs en fonction des côtés et des angles du triangle, on obtient une nouvelle relation, qui est homogène par rapport aux côtés, et, si l'on remplace les côtés par les sinus des angles qui leur sont proportionnels, on a en définitive une relation entre les trois angles A, B, C, qui résulte de ce que la somme de ces angles est égale à π. Si donc on remplace dans cette relation A, B, C par trois fonctions de A, B, C dont la somme soit égale à π, la relation est encore satisfaite.

M. Lemoine conclut de là qu'on fait ainsi correspondre à une certaine relation entre des éléments

(¹) LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Marseille, 1891; *Journal de Mathématiques spéciales*, 1892; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1893.

déduits d'un triangle une autre relation, différente en général de la première, entre des éléments de ce triangle. Une telle conclusion n'est pas valable, car nous n'avons pas montré qu'on peut remonter de cette relation à une autre contenant explicitement des éléments autres que les côtés et les angles du triangle. Or, c'est le point essentiel, qui fait tout l'intérêt du principe de M. Lemoine. Ce principe nous permet en effet de passer d'une relation contenant explicitement des éléments autres que les côtés et les angles du triangle à une autre qui contient elle-même explicitement des éléments autres que les côtés et les angles, et même il nous apprend que les éléments contenus dans les deux autres relations, s'ils sont différents, sont du moins définis par les mêmes conditions géométriques. La démonstration de M. Lemoine ne s'applique en réalité qu'aux relations qui contiennent seulement les côtés et les angles. Or, quand, par exemple, nous remplaçons dans la relation $r = (p - a)\tang\frac{A}{2}$, r par une quelconque de ses valeurs ne contenant que les côtés et les angles du triangle, nous formons une relation qui exprime l'égalité de deux quantités égales séparément à r. Les relations entre les éléments qu'on peut déduire d'un triangle ne sont donc pas équivalentes aux relations entre les côtés et les angles de ce triangle.

Voici comment on peut énoncer d'une manière précise le principe de M. Lemoine :

Si, dans une relation entre les côtés et les angles d'un triangle et des éléments définis géométriquement à l'aide de ce triangle, on change A *en* $-$ A, B *en* $\pi -$ B, C *en* $\pi -$ C, a *en* a, b *en* $-b$, c *en* $-c$, *et chacun des éléments qui y entrent en un certain autre, affecté du signe* + *ou du signe* $-$, *mais défini à l'aide*

du triangle par les mêmes conditions géométriques, on obtient une nouvelle relation qui est encore satisfaite.

Par exemple, si dans la relation

$$r = (p - a)\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

on remplace a par $-a$, b par $-b$, c par $-c$, A par $-$A, le rayon r du cercle inscrit par l'élément r_a défini par la même condition géométrique d'être le rayon d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle et affecté du signe $+$, on a la relation

$$r_a = p\operatorname{tang}\frac{A}{2}.$$

Dans la démonstration du principe de M. Lemoine que j'ai publiée en 1893, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, je n'ai pas remarqué l'objection que j'oppose aujourd'hui à l'énoncé et à la démonstration que M. Lemoine en a donnés. Je me suis contenté de montrer que, par un même procédé géométrique, on peut déduire d'une relation quelconque entre a, b, c, A, B, C une relation de même forme entre a, $-b$, $-c$, $-$A, $\pi -$ B, $\pi -$ C, ce qui ne suffit pas pour établir le principe dans la forme précise où je viens de l'énoncer.

Je me propose dans ce travail de reprendre la démonstration de ce principe ; je crois bien lui avoir donné une forme rigoureuse, dans la mesure toutefois où le permet la question toujours délicate des conventions de signes. Dans la première Partie je reproduis, en la complétant, la démonstration que j'ai publiée en 1893. Dans la seconde, j'aborde la question par une voie différente, et je suis conduit à une transformation des angles et des côtés qui n'est pas celle de M. Lemoine, mais qui en a toutes les propriétés.

Étant données dans le plan les droites AA′, BB′, ..., LL′, passant par un même point O, les directions positives sur ces droites étant définies par les semi-droites OA, OB, ..., OL situées dans une même région du plan (région positive), relativement à un axe-origine UV, passant par O, sur lequel est définie une direction OU comme direction positive, nous appellerons *angle de deux droites* l'angle de leurs directions positives, et *angle de deux directions positives* l'angle dont il faut faire tourner l'une d'elles pour la faire coïncider avec l'autre, en balayant l'espace compris entre les semi-droites. Dès lors, en définissant un sens positif de rotation, c'est-à-dire en appliquant des conventions de signes analogues à celles qui sont relatives aux segments sur une droite et qui conduisent à l'identité d'Euler, on arrive à une relation générale entre les directions A, B, C, ..., L, où les angles sont définis sans *ambiguïté*

$$(A, B)+(B, C)+\ldots+(K, L)+(L, A)\equiv 0.$$

Cela posé, prenons pour axes de coordonnées deux demi-droites OX et OY, l'une OX coïncidant avec la direction positive de l'axe-origine UV, l'autre OY étant une direction positive définie comme précédemment et faisant, avec OX, l'angle

$$(X, Y) = \theta.$$

Donnons alors une droite parallèle à OY, MP, dont nous supposerons, pour plus de simplicité, l'abscisse $OP = a$ positive, et une droite OM, variable, que nous définirons par les angles de sa direction positive OZ avec les axes de coordonnées. En posant

$$(OX, OZ) = \alpha \qquad (OZ, OY) = \beta.$$

nous aurons dans tous les cas, d'après les conventions précédentes,

$$\alpha + \beta = \theta.$$

Appelons c l'ordonnée du point M, et b la valeur algébrique du segment OM.

Définissons alors, au moyen de ces données et par des conditions géométriques bien déterminées, un système de points et de droites, et soit une relation entre les segments qui aboutissent à deux de ces points, l'un des deux étant choisi comme origine, et entre les angles de deux de ces droites, l'une étant prise comme droite-origine. Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sont les valeurs algébriques des segments et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ celles des angles, qui, d'après nos conventions, sont connues sans ambiguïté, la relation se mettra sous la forme

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, a, b, c, \alpha, \beta, \pi - \theta) = 0,$$

avec la condition $\alpha + \beta = \theta$, et cette formule est *générale*, car nous l'avons obtenue en nous servant de relations entre les *segments* et les *angles*, qui s'appliquent dans tous les cas. Cherchons à l'*interpréter* géométriquement.

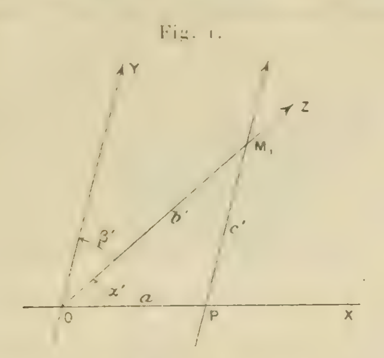
Plaçons-nous dans l'hypothèse où la direction positive OZ est à l'intérieur de l'angle XOY. Les segments a, b, c prennent alors des valeurs positives, a, b', c', et les angles α et β ont aussi des valeurs positives α' et β'. Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et $o_1, o_2, \ldots, o_n$ les valeurs absolues des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. On a alors la relation

$$(1)\quad \begin{cases} f(\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_p, \\ \qquad \pm o_1, \pm o_2, \ldots, \pm o_n, a, b', c', \alpha', \beta', \pi - \theta) = 0, \end{cases}$$

qui, ayant lieu entre des quantités toutes positives, ne diffère pas d'une certaine relation *géométrique* entre les

côtés et les angles du triangle OM_1P formé dans cette hypothèse, et les éléments déduits de ce triangle par les conditions géométriques données.

Fig. 1.



Dans l'hypothèse où la direction positive OZ est au contraire en dehors de l'angle XOY, les segments b et c prennent des valeurs négatives $-b''$ et $-c''$: l'angle β prend une valeur négative $-\beta''$; de sorte que la relation *géométrique* qui a lieu dans ce cas prend la forme

$$\begin{aligned} f(&\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_p,\\ &\pm o_1, \pm o_2, \ldots, \pm o_n, a, -b'', -c'', \alpha'', -\beta'', \pi - \theta) = 0, \end{aligned}$$

ou, si l'on observe que les angles α'' et $\pi - \theta$ sont extérieurs au triangle OM_2P, formé dans cette hypothèse, et sont supplémentaires des angles correspondants du triangle, α_1 et θ,

$$f(\pm r_1, \ldots, \pm o_1, \ldots, a, -b'', -c'', \pi - \alpha_1, -\beta'', \pi - \theta) = 0.$$

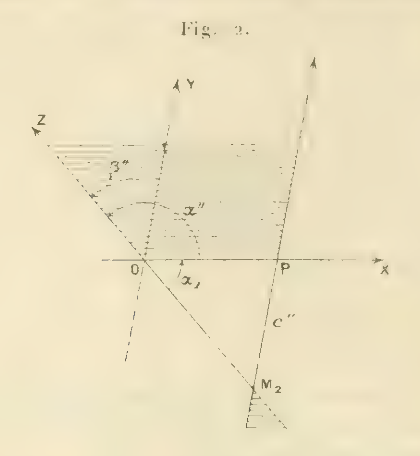
Mais cette relation géométrique a lieu, quel que soit le triangle ; en l'appliquant au triangle OM_1P nous avons la relation géométrique

$$(2) \quad f(\pm r_1, \ldots, \pm o_1, \ldots, a, -b', -c', \pi - \alpha', -\beta', \theta) = 0,$$

d'où résulte bien évidemment le principe de M. Lemoine, tel que je l'ai énoncé.

Il faut remarquer que, si la relation générale est irrationnelle, le signe qui précède chaque radical n'est pas déterminé. Il ne se détermine que dans chaque cas de

Fig. 2.



figure, et, par suite, il est possible que, pour passer de la première relation géométrique qui résulte de la relation générale à la seconde relation géométrique, il soit nécessaire de changer le signe.

Appliquons le principe de M. Lemoine à un exemple particulier.

Menons par le point P la perpendiculaire à la bissectrice des deux demi-droites OX et OY ; c'est une droite fixe D, qui est une bissectrice des deux droites OX et MP. Menons par le point O la bissectrice des deux demi-droites OX et OZ, qui rencontre la droite fixe D en un point variable I. Du point I, abaissons la perpendiculaire IH sur la droite OX ; la direction positive est bien déterminée. Appelons ρ la valeur algébrique du segment IH. Cette quantité sera fournie par une relation où n'entreront que a, b, c, α et β,

$$f(\rho, a, b, c, \alpha, \beta, \pi - \theta) = 0.$$

Quand la droite OZ est entre OX et OY, le point I est le centre du cercle inscrit au triangle OM_1P; ρ est d'ailleurs négatif et sa valeur absolue est égale au rayon du cercle inscrit. On a alors la relation géométrique

$$f(-r, a, -b', -c', \alpha', \beta', \pi-\theta) = 0.$$

Quand la droite Oz est en dehors de l'angle XOY, le point I est le centre du cercle exinscrit dans l'angle opposé au côté a du triangle OM_2P; ρ est encore négatif, et sa valeur absolue est égale au rayon r_a du cercle circonscrit. On a ainsi la relation géométrique

$$f(-r_a, a, -b'', -c''', \pi-\alpha_1, -\beta'', \pi-\theta),$$

et, si on l'applique au triangle OM_1P, on obtient

$$f(-r_a, a, -b', -c', \pi-\alpha', -\beta', \theta) = 0,$$

ce qui montre que, dans la transformation de M. Lemoine, r se change en r_a.

Un raisonnement analogue montre que le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC se change en $-$R, que le rayon r_b du cercle exinscrit dans l'angle B se change en le rayon r_c du cercle exinscrit dans l'angle C.

Lorsque la droite OM tourne autour du point O dans le sens positif, le point M prend d'abord des positions telles que M_1; puis, après le passage à l'infini, des positions telles que M_2. Le triangle *fermé* OM_1P du premier cas devient, dans le second, le triangle *ouvert* OM_2P constitué par la portion du plan couverte de hachures; et la deuxième relation géométrique est, par rapport à ce triangle *ouvert*, l'analogue de la première appliquée au triangle *fermé* OM_1P. La transformation de M. Lemoine consiste, dès lors, à substituer aux éléments d'un triangle fermé de l'espèce OM_1P les éléments correspondants d'un triangle ouvert de l'espèce OM_2P.

Mais les deux triangles fermés M_1OP et M_2OP sont d'espèces différentes. Si l'on parcourt le contour du premier triangle dans le sens M_1OPM_1, on laisse l'aire comprise à sa gauche, le triangle M_1OP est orienté positivement; si l'on parcourt le contour du second triangle dans le sens M_2OPM_2, l'aire comprise est à droite, le triangle M_2OP est orienté négativement.

DEUXIÈME PARTIE.

Soient trois droites dont les équations sont

$$X = x\cos\lambda + y\sin\lambda - p = 0,$$
$$Y = x\cos\mu + y\sin\mu - q = 0.$$
$$Z = x\cos\nu + y\sin\nu - r = 0.$$

Elles se coupent deux à deux en trois points A, B, C et forment un triangle. Considérons une courbe géométriquement définie par rapport au triangle. Elle est évidemment indépendante de la position de l'origine et de la direction des axes de coordonnées.

Son équation cartésienne est de la forme

$$\varphi(x, y, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Remplaçons x et y par leurs expressions en fonction de X, Y, Z. On a alors identiquement

$$\varphi(x, y, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = f(X, Y, Z, p, q, r, \lambda, \mu, \nu),$$

et l'équation

$$f(X, Y, Z, p, q, r, \lambda, \mu, \nu) = 0$$

exprime la relation qui existe entre les trois valeurs que prennent les polynomes X, Y, Z, pour un point quelconque de la courbe. Elles sont indépendantes de la position de l'origine, du moins quand l'origine varie en restant toujours d'un même côté de chacune des trois

droites, c'est-à-dire quand elle reste dans une même région du plan limitée par ces trois droites. La fonction qui les lie ne dépend donc pas de p, q, r. Mais ces valeurs ne dépendent évidemment pas non plus de l'axe Ox. Or, quand l'axe Ox tourne d'un angle θ positif ou négatif, les valeurs λ, μ, ν varient toutes trois dans le même sens de la même quantité θ. La fonction qui doit être indépendante de θ ne peut dépendre que des différences $\nu - \mu$, $\lambda - \nu$, $\mu - \lambda$.

Finalement l'équation en *coordonnées trilatères* est de la forme

$$F(X, Y, Z, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Cela posé, abaissons de l'origine O les perpendiculaires sur les côtés du triangle ABC; ces perpendiculaires rencontrant respectivement les côtés en L, M, N, considérons les directions positives OL, OM, ON et appelons λ, μ, ν les angles (OL, Ox) (OM, Ox), (ON, Ox). Ces angles sont définis à un multiple de 2π près.

Mais si nous laissons fixes les deux côtés AB et AC et si nous déplaçons le côté BC parallèlement à lui-même, nous pouvons prendre parmi les valeurs de μ et de ν deux valeurs déterminées qui sont alors des *données*. L'angle λ prend des valeurs connues à un multiple de 2π près et qui augmentent ou diminuent d'un multiple impair de π après le passage du côté BC par l'origine supposée fixe.

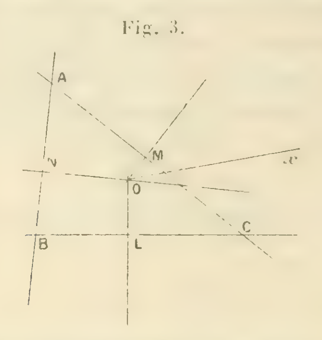
Pour toutes les positions du triangle ABC, l'équation de notre courbe reste

$$F(X, Y, Z, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Il y a deux cas à examiner, selon que la droite BC rencontre la perpendiculaire à cette droite menée par l'origine d'un côté ou de l'autre de l'origine.

Supposons d'abord que l'origine et l'axe Ox soient placés comme l'indique la *fig.* 3. Nous pouvons prendre pour μ et ν qui sont des données les plus petits angles

Fig. 3.



positifs que fait Ox avec OM et ON. Si λ_1 est le plus petit angle positif que fait Ox avec la direction OL, l'angle λ est de la forme $2h\pi + \lambda_1$.

A, B, C étant les angles *géométriques* du triangle ABC, on a alors

$$\nu - \mu = \pi - A,$$
$$\lambda - \nu = 2h\pi + \pi - B,$$
$$\mu - \lambda = -\pi - C - 2h\pi.$$

D'autre part, puisque les quantités p, q, r, qui sont les valeurs algébriques des segments OL, OM, ON sont positives, pour tout point qui est à l'intérieur du triangle ABC et qui, par suite, dans notre cas, est dans la même région que l'origine par rapport à chacun des côtés du triangle, les valeurs des polynomes X, Y, Z sont négatives et chacune d'elles devient positive dès que le point traverse le côté correspondant. Si donc nous affectons les distances géométriques du point aux trois côtés d'un signe : du signe + si le point est par rapport au côté dans la même région que le sommet opposé ; du signe —, s'il est dans l'autre région, et si nous désignons par X', Y',

Z' les valeurs algébriques ainsi obtenues, nous voyons que l'on a

$$X = -X', \qquad Y = -Y', \qquad Z = -Z',$$

et l'équation de la courbe C_1, *rapportée au triangle* ABC, est

$$F(-X', -Y', -Z', \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0,$$

ou, comme l'équation est homogène en X', Y', Z',

$$(1) \quad F(X', Y', Z', \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0.$$

Passons maintenant à l'autre cas qui comprend les *fig.* 4 et 5. Appelons λ_2 le plus petit angle positif

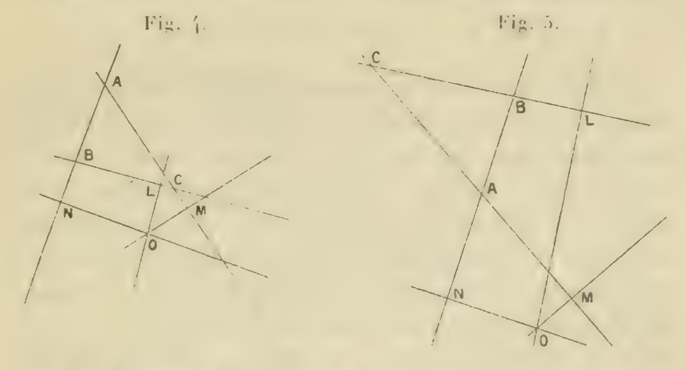


Fig. 4. Fig. 5.

que fait Ox avec OL; l'angle λ est de la forme $2h\Pi + \lambda_2$. A, B, C étant les angles *géométriques* du triangle ABC, on a

$$\nu - \mu = \pi - A,$$
$$\lambda - \nu = 2k\pi - B,$$
$$\mu - \lambda = -C - 2k\pi.$$

D'autre part, dans la *fig.* 4, les valeurs des polynomes Y et Z sont négatives pour tout point qui est, par rapport au côté, dans la même région que le sommet A. Donc, X', Y', Z' étant les valeurs algébriques définies plus

haut,

$$X = X', \qquad Y = -Y', \qquad Z = -Z'.$$

et l'équation de la courbe est

(2) $F(-X', Y', Z', \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$

Dans la *fig.* 5, les valeurs des polynomes Y et Z deviennent positives pour tout point qui est par rapport au côté dans la même région que le sommet opposé, et la valeur du polynome X est négative quand le point est par rapport à BC du même côté que A. Donc

$$X = -X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z',$$

et l'équation est encore

(2) $F(-X', Y', Z', \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$

L'équation obtenue est rapportée à l'un ou l'autre des deux triangles qui constituent les *fig.* 4 et 5, et elle représente une courbe C_2 ou C'_2 dans chacune de ces figures. Mais, comme cette équation s'applique à un triangle de référence quelconque, si nous la supposons rapportée au triangle de la *fig.* 3, elle représentera dans cette figure une courbe C'_1 qui sera précisément l'analogue et même l'homothétique des courbes C_2 et C'_2. Les deux courbes C_1 et C'_1 sont définies, par rapport au triangle de la *fig.* 3, par les mêmes conditions géométriques. Donc, si, rapportée au triangle ABC,

(1) $F(X, Y, Z, \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -C - \pi - 2h\pi) = 0$

est l'équation d'une courbe déterminée par rapport à ce triangle par certaines conditions géométriques,

(2) $F(-X, Y, Z, \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0$

est celle d'une courbe déterminée par rapport au triangle par les mêmes conditions géométriques.

Si le problème n'est susceptible que d'une solution, comme, par exemple, la détermination d'un cercle passant par les trois sommets du triangle, les deux équations se ramènent à une seule. Si le problème a plusieurs solutions, comme la détermination d'un cercle tangent aux trois droites qui limitent le triangle, les deux équations représentent des courbes différentes.

On voit que l'on passe d'une des équations à l'autre en changeant X en $-$ X, Y en Y, Z en Z, et A en A, B en $B-(2m+1)\pi$, C en $C+(2m+1)\pi$, m étant un entier arbitraire positif ou négatif.

Les trois triangles 3, 4 et 5 ont même orientation, c'est-à-dire que le contour ABCA peut être parcouru

Fig. 6.

dans le même sens. En faisant varier les trois figures semblablement à elles-mêmes et en les déplaçant dans le plan, on peut donc amener les trois triangles en coïncidence et les origines prennent alors les positions O_1, O_2 et O'_2.

L'équation générale

$$F(X, Y, Z, \nu-\mu, \lambda-\nu, \mu-\lambda)=0$$

est l'équation d'une courbe satisfaisant aux conditions données, quelle que soit la position de l'origine par

rapport au triangle ABC. Elle prend la forme (1) pour toutes les positions de l'origine telles que O_1, qui sont à l'intérieur du triangle, et la forme (2) pour les positions telles que O_2 et O'_2 comprises à l'intérieur de l'angle A et extérieures au triangle ABC. Le triangle ABC, c'est-à-dire l'espace *fermé*, qui est limité par les trois côtés du triangle, est le lieu des origines pour lesquelles l'équation générale prend la forme (1), et l'espace *ouvert*, qui est la partie du plan couverte de hachures, est le lieu des origines pour lesquelles l'équation générale prend la forme (2).

On aperçoit donc, et il n'est guère possible de donner à ces considérations une forme plus précise, que l'équation (1) correspond à l'espace *fermé*, comme l'équation (2) à l'espace *ouvert*, et que la transformation par laquelle on passe de la courbe C_1 à la courbe C'_1 revient à substituer à un élément lié à l'espace *fermé* l'élément correspondant lié de la *même* façon à l'espace *ouvert*. Ainsi, le cercle inscrit à l'espace fermé, c'est-à-dire le cercle inscrit au triangle géométrique ABC, se transformera en le cercle inscrit à l'espace ouvert, c'est-à-dire le cercle exinscrit au triangle dans l'angle A ; le centre du cercle inscrit se transformera en le centre de ce cercle exinscrit ; c'est ce que confirme le calcul direct.

Abaissons de l'origine O les perpendiculaires OL, OM, ON sur les côtés du triangle ABC, et appelons, comme plus haut, λ, μ, ν les angles

$$(OL, Ox), \quad (OM, Ox), \quad (ON, Ox),$$

connus à un multiple de 2π près.

Nous désignerons par c, a, b les valeurs algébriques des segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, comptés sur les directions positives $\nu + \frac{\pi}{2}$, $\lambda + \frac{\pi}{2}$, $\mu + \frac{\pi}{2}$.

Envisageons des systèmes de points et de droites géométriquement définis par rapport au triangle ABC et soit une relation entre les segments qui aboutissent à deux de ces points, l'un des deux étant pris comme origine, et entre les angles de deux de ces droites, l'une étant choisie comme droite origine. Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont les valeurs algébriques de ces segments et de ces angles, cette relation se mettra sous la forme générale

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, a, b, c, \nu - \mu, \lambda - \nu, \mu - \lambda) = 0.$$

Pour chacun des deux cas que nous avons distingués précédemment, mettons en évidence dans la formule générale les valeurs arithmétiques des segments ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_p$, a, b, c et les valeurs de sangles *géométriques* compris entre les droites. Nous connaissons dans les deux cas les valeurs de $\nu - \mu$, $\lambda - \nu$, $\mu - \lambda$ en fonction des angles A, B, C du triangle. D'autre part, dans la *fig.* 3, a, b, c sont positifs; dans la *fig.* 4, a est négatif, b et c sont négatifs. La relation algébrique fournit pour les trois figures une relation géométrique entre des longueurs et des angles. Mais la relation de la *fig.* 5 se ramène à celle de la *fig.* 4. Les triangles de ces deux figures sont, en effet, homothétiques inverses et, si l'on compte deux segments homologues sur la même direction, les valeurs algébriques de ces segments sont proportionnelles et de signe contraire. Les deux relations étant homogènes par rapport aux longueurs, il suffit donc de changer le signe des longueurs dans l'une pour obtenir l'autre.

Il reste ainsi deux formes de la relation générale entre les segments et les angles du système de points et de droites géométriquement défini par rapport au triangle, qu'on déduit l'une de l'autre, lorsqu'on remplace les

côtés a', b', c' du triangle par a', $-b'$, $-c'$, et les angles A, B, C par A, $B-(2m+1)\pi$, $C+(2m+1)\pi$. Si nous *interprétons* géométriquement, pour chaque cas de figure, les valeurs algébriques des segments et des angles du système, nous obtenons deux relations géométriques entre des longueurs et des angles géométriques.

Donnons un exemple. Considérons le point I tel que les polynomes X, Y, Z aient des valeurs égales; abaissons de ce point la perpendiculaire sur le côté variable BC et sur cette droite prenons une direction fixe comme direction positive. Appelons ρ la valeur algébrique du segment qui a son origine au point I et qui aboutit au pied P de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le côté BC. Or, le côté BC restant fixe, le point I est défini indépendamment de la position de l'origine, du moins quand elle reste dans une même région limitée par les trois droites AB, BC, CA, et indépendamment de l'orientation de l'axe Ox. Donc ρ sera fourni par une relation où n'entreront que les éléments du triangle ABC, qui sont indépendants de la position de l'origine et de l'orientation de l'axe Ox, c'est-à-dire, en dernière analyse, les éléments a, b, c définis plus haut et les différences $\nu-\mu$, $\lambda-\nu$, $\mu-\lambda$. Soit cette relation

$$f(\rho, a, b, c, \nu-\mu, \lambda-\nu, \mu-\lambda)=0.$$

Puisque pour le point I les polynomes X, Y, Z ont le même signe, ce point est, par rapport à chacun des côtés, dans la même région que l'origine. Donc, dans la *fig.* 3, le point I est le centre du cercle inscrit au triangle, et, dans la *fig.* 4, c'est le centre du cercle exinscrit au triangle dans l'angle A.

Interprétons géométriquement, dans chacune de ces deux figures, la relation générale. Si la direction positive

fixe sur laquelle est compté le segment variable IP est convenablement choisie, pour la première figure, ρ est positif et égal à $+r_1$, r_1 étant le rayon du cercle inscrit au triangle ABC. D'ailleurs, dans ce cas, a, b, c sont positifs et ont pour valeurs a_1, b_1, c_1, longueurs des côtés du triangle ABC. La relation générale devient la relation géométrique

$$f(r_1, a_1, b_1, c_1, \pi - A, 2h\pi + \pi - B, -\pi - C - 2h\pi) = 0.$$

Dans la seconde figure, ρ est négatif et a pour valeur absolue $r_{a,2}$, rayon du cercle exinscrit dans l'angle A. D'autre part, a est négatif, b et c sont positifs, leurs valeurs absolues sont a_2, b_2, c_2, longueurs des côtés du triangle. La relation générale revient donc, dans ce cas, à la relation géométrique

$$f(-r_{a.2}, -a_2, b_2, c_2, \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$$

Cette relation, s'appliquant à tous les triangles, devient, dans le triangle 3,

$$f(-r_{a.1}, -a_1, b_1, c_1, \pi - A, 2k\pi - B, -C - 2k\pi) = 0.$$

On voit que l'élément $-r_a$ correspond au triangle *ouvert*, comme l'élément r correspond au triangle *fermé*.

Il apparait ainsi que trois droites dans un plan le partagent en quatre espaces, dont un *fermé* et trois *ouverts*, et que l'élément $-r$ correspond à l'espace fermé, comme les éléments r_a, r_b, r_c; ce qui revient à dire que les éléments $-r$, r_a, r_b, r_c sont les solutions d'un même problème : *Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois droites*. Il en est de même des éléments $-p$, $p-a$, $p-b$, $p-c$. C'est ce que confirme le calcul direct; nous avons, par exemple, les formules bien connues

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = 0,$$

$$-r + r_a + r_b + r_c = 4R,$$

$$(-r)(r_a)(r_b)(r_c) = -S^2.$$

et

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c - r r_a - r r_b - r r_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

d'une part, et, d'autre part,

$$(-p)(-r) = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c,$$

$$-p + (p-a) + (p-b) + (p-c) = 0,$$

$$(-p)(p-a)(p-b)(p-c) = -S^2.$$

Nous avons considéré dans nos figures des triangles ABC dont les côtés varient en restant parallèles à des directions fixes, mais dont on peut parcourir le contour ABCA dans le sens positif des angles employés en Trigonométrie. Nous disons qu'ils sont orientés positivement. Mais il est d'autres triangles dont les côtés sont parallèles aux mêmes droites et dont le contour ABCA est parcouru dans le sens négatif : ils sont orientés négativement.

Prenons un triangle de chaque espèce et, pour chacun d'eux, plaçons l'origine à l'intérieur. Dans le premier cas, les segments a, b, c sont positifs et, dans le second, ils sont négatifs. On voit ainsi l'utilité, pour la généralité des formules, de considérer les côtés d'un triangle, non plus comme des longueurs, mais comme des segments.

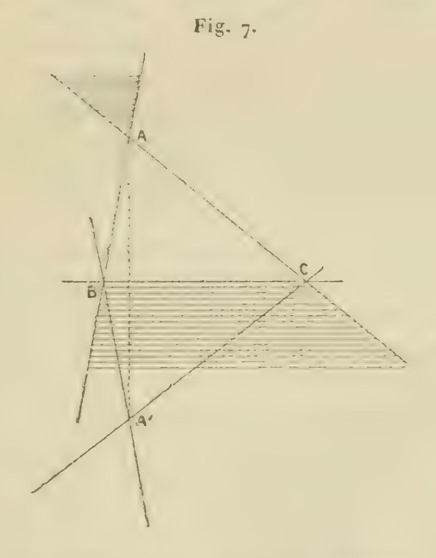
Il est de même utile de considérer la surface d'un triangle comme une quantité algébrique. On lui donnera, par exemple, le signe + pour un triangle orienté positivement, et le signe — pour un triangle orienté négativement.

La transformation à laquelle nous sommes parvenu n'est pas la transformation de M. Lemoine. Or, si l'on se reporte à la première Partie de ce travail, on voit que la transformation de M. Lemoine consiste à substituer symboliquement à l'espace fermé A'BC l'espace ouvert

ABC couvert de hachures, A_1 et A' étant deux points symétriques par rapport à BC. Notre transformation consiste, au contraire, à substituer symboliquement à l'espace fermé ABC l'espace ouvert ABC, relatif à l'angle A. Pour obtenir la transformation de M. Lemoine il suffit d'effectuer, avant notre transformation, une autre transformation qui consiste à substituer à l'espace fermé A'BC l'espace fermé ABC, c'est-à-dire à substituer à un espace fermé orienté négativement un espace orienté positivement.

Donnons un exemple. Notre transformation fait correspondre, comme nous l'avons vu, $-r$ et r_a. Mais la

Fig. 7.



transformation qui substitue symboliquement à l'espace fermé A'BC l'espace fermé ABC fait évidemment correspondre $-r$ et $+r$. Donc, par la transformation de M. Lemoine, r se change en r_a; c'est ce que confirme le calcul.

[K23a]

CONSTRUCTION DE LA PERSPECTIVE CONIQUE D'UNE SPHÈRE;

Par M. M. d'OCAGNE.

Soient ω le centre de cette sphère mis en perspective, ab son diamètre parallèle à la ligne d'horizon.

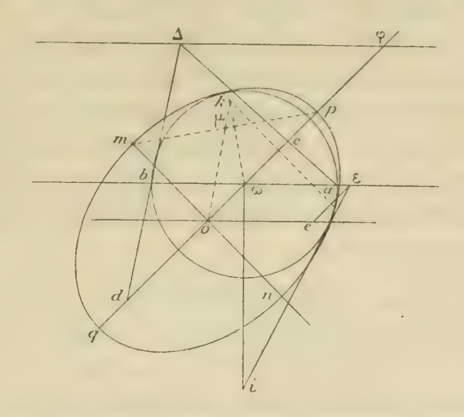
Si φ et Δ sont les points principaux de fuite et de distance, le diamètre perpendiculaire au tableau a sa perspective dirigée suivant $\omega\varphi$, ses extrémités c et d se trouvant à la rencontre de cette droite avec Δa et Δb.

Le grand cercle horizontal de la sphère a donc pour perspective l'ellipse passant par a, b, c, d et ayant en c et d des tangentes parallèles à ab. Il en résulte que cd est un diamètre de cette ellipse, dont le centre o est, par suite, le milieu de cd.

Le diamètre conjugué de oc, dirigé suivant la parallèle menée par o à ab, s'obtiendra en menant à cette ellipse une tangente parallèle à pq. Pour cela, opérons un relèvement de front autour de ab. Le cercle horizontal de la sphère se relève suivant le cercle de diamètre ab, et le point à l'infini sur pq se relève au point i situé sur la perpendiculaire élevée à ab en ω et à une distance ωi de ce point égale à $\varphi\Delta$. Donc les tangentes à l'ellipse $abcd$ parallèles à pq se relèvent suivant les tangentes menées de i au cercle ab. Traçons l'une de ces tangentes $i\varepsilon$. Quand on revient à la position primitive, le point ε situé sur la charnière ne bouge pas, et la tangente devenant parallèle à pq donne le demi-diamètre oe conjugué de oc, tel que $oe = \omega\varepsilon$.

L'ellipse de contour apparent de la sphère est l'en-

veloppe des perspectives de ses cercles de front, c'est-à-dire des cercles ayant pour diamètres les cordes de



l'ellipse *abcd*, parallèles à *ab*. Il en résulte d'abord que ce contour apparent a un axe dirigé suivant *cd*. En outre, lorsque la corde variable vient se confondre avec la tangente en *c* ou en *d*, le diamètre du cercle correspondant étant nul, il s'ensuit que les points *c* et *d* sont les foyers de l'ellipse de contour apparent.

Le petit axe de cette ellipse, dirigé suivant la perpendiculaire élevée en *o* à *cd* est nécessairement égal au maximum de la corde variable, c'est-à-dire au diamètre conjugué de *oc*. Nous venons de voir que ce diamètre est égal au double de $\omega\varepsilon$. Il nous suffit donc de prendre sur la direction du petit axe $om = on = \omega\varepsilon$. Ayant les sommets *m* et *n* du petit axe et les foyers *c* et *d*, nous obtenons les sommets *p* et *q* du grand axe, en prenant sur cet axe $op = oq = mc$.

En résumé, la construction de l'ellipse de contour apparent de la sphère ayant *ab* pour diamètre horizontal de front est la suivante :

Joindre le milieu ω *de ab* (*perspective du centre*)

au point de fuite principal φ, puis les points a et b au point de distance principal Δ, ce qui donne sur $\omega\varphi$ les points c et d.

Prendre sur la perpendiculaire élevée en ω à ab le segment ωi égal à $\varphi\Delta$ et mener du point i au cercle de diamètre ab une tangente qui coupe ab au point ε.

Sur la perpendiculaire élevée à cd en son milieu o, porter $om = on = \omega\varepsilon$, puis sur cd, $op = oq = mc$.

L'ellipse de contour apparent cherchée est celle qui a pour axes mn et pq.

Remarquons que le cercle de diamètre *ab* étant la perspective d'un cercle de front de la sphère est bitangent à cette ellipse. D'après la construction de la normale à l'ellipse donnée dans notre *Cours* (¹), la corde de contact passe par le point *k* où la perpendiculaire abaissée de ω sur *mp* rencontre la droite qui joint le point *o* au milieu μ de *mp*.

CONGRÈS DE ZURICH.

L'abondance des matières nous a seule empêché jusqu'ici de constater le très grand succès du *Congrès international des Mathématiciens*, dont nous avons parlé plusieurs fois, et qui s'est tenu à Zurich au mois d'août dernier.

Nous espérons pouvoir donner prochainement le texte des résolutions adoptées. Bornons-nous à annoncer que, d'après les décisions prises, le prochain Congrès international se tiendra à Paris, en 1900, et que l'organisa-

(¹) *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*, p. 280, note au bas de la page.

tion en est confiée à la *Société mathématique de France*.

Ce premier essai a été un véritable triomphe et assure la durée et la solidité de cette institution nouvelle. Le mérite en revient pour la meilleure part aux Membres du Comité d'organisation, qui ont droit à la reconnaissance de tous les Mathématiciens.

LA RÉDACTION.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. M. d'Ocagne.

.... Le théorème de M. Tarry, dont j'ai donné récemment une démonstration géométrique (*N. A.*, p. 474; 1897) peut s'établir par une voie tout à fait élémentaire. Reprenons la figure de la page 475 et admettons que ab pivote autour du point o. Le rapport $\frac{oa}{ob}$ étant constant, et le triangle abc restant semblable à lui-même, l'angle boc et le rapport $\frac{oc}{ob}$ sont nécessairement constants. Si donc nous posons $boc = \omega$, $\frac{oc}{ob} = \lambda$, nous voyons que le lieu du point c s'obtient en prenant la droite homothétique de bb', par rapport à o, le rapport d'homothétie étant λ, et faisant tourner la droite ainsi obtenue de l'angle ω autour du point o.

Il suffit, dès lors, pour obtenir la tangente au lieu du point c, lorsque la droite ab a pour enveloppe une courbe quelconque qu'elle touche au point o, de remarquer que cette tangente n'est autre que la droite que décrirait le point c si ab pivotait autour du point o, droite qui vient d'être déterminée. ....

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1539.

(1885, p. 392.)

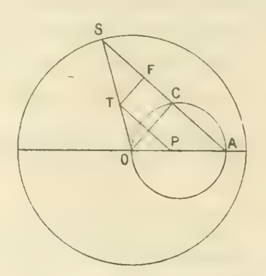
Le lieu des foyers des sections faites, dans un ellipsoïde de révolution aplati par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution, est une podaire d'ellipse. (FOURET.)

SOLUTION

Par M. E. BALLY.

Proposons-nous d'abord le problème suivant :

On donne un cercle de centre O, un point A, et le cercle de diamètre OA. On joint le point A à un point mobile S de la



première circonférence, AS coupe la seconde en C : lieu du point F qui partage le segment CS dans un rapport constant.

Joignons OC, OS; la perpendiculaire en F à AS coupe OS en T, menons TP parallèle à AS. On a

$$\frac{CF}{CS} = \frac{OT}{OS} = \frac{OP}{OA}.$$

Le rapport $\frac{CF}{CS}$ étant constant, le point T décrit un cercle de centre O, et le point P est fixe. TF enveloppe la conique antipodaire de ce cercle par rapport au point P, et le point F décrit la podaire de cette conique relative au point A.

Cette conique est d'ailleurs une ellipse, une hyperbole ou un système de deux points suivant que l'on a $OP < OT$, $OP > OT$, $OP = OT$; ou, à cause de l'égalité des deux derniers rapports, $OA < OS$, $OA > OS$, $OA = OS$. Le lieu est donc une podaire d'ellipse, d'hyperbole, ou un système de deux cercles tangents au point A aux cercles donnés, suivant que le point A est intérieur, extérieur à la première circonférence, ou situé sur elle.

On s'assure aisément que toute podaire de conique à centre, relative à un point de l'axe focal de cette conique, peut être ainsi définie.

Considérons maintenant la quadrique engendrée par la révolution d'une conique à centre autour de l'axe non focal (ellipsoïde aplati ou hyperboloïde à une nappe). Les sections considérées sont semblables, chacune l'étant à la section méridienne qui lui est parallèle.

Figurons le cercle équatorial de centre O, décrit par les sommets de l'axe focal de la méridienne : les foyers réels des sections sont dans le plan de ce cercle.

Soit A la trace sur ce plan de la droite donnée : le lieu du centre des sections est le cercle de diamètre OA (lieu des milieux des cordes du cercle équatorial qui passent en A); le lieu de leurs sommets est le cercle équatorial. Or, C et S étant le centre et un sommet d'une section, et F le foyer voisin de S, le rapport $\frac{CF}{CS}$ est constant et égal à l'excentricité de la méridienne. On est donc ramené au problème précédent.

Suivant que la droite coupe, ne coupe pas ou touche l'ellipsoïde, on a une podaire d'ellipse, d'hyperbole ou un système de deux cercles.

Autre solution par M. Ducey.

Question 1540.

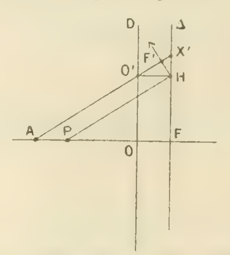
(1885, p. 392.)

Le lieu des foyers des sections faites, dans un cylindre parabolique, par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal est une podaire de parabole. (Fouret.)

SOLUTION

Par M. E. Bally.

Soit, dans le plan diamétral principal, A la trace de la droite donnée, OD la génératrice principale, AO la trace du plan



perpendiculaire à OD mené par A, Δ la parallèle à OD menée par le foyer F de la parabole de section.

Soit F′ le foyer d'une section d'axe AO′. Les ordonnées qui correspondent dans les deux paraboles aux points d'abscisses OF et O′X′ respectivement, étant égales, on a :

$$\overline{OF}^2 = \overline{O'F'}.\overline{O'X'}.$$

Menons O′H parallèle à OF; on aura

$$\overline{OH}^2 = O'F'.O'X',$$

ce qui montre que F′ est la projection de H sur AO′. La parallèle à AO′ menée par H passe en un point fixe P, tel que $\overline{AP} = \overline{OF}$. La droite HF′ enveloppe donc la parabole antipodaire de Δ relative à P, et le point F′ décrit la podaire de cette parabole relative à A.

Si la droite est tangente au cylindre, le lieu est le cercle de diamètre OF.

Question 1749.

(1896, p. 488.)

On sait que le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère ABCD, *dont les diagonales se coupent en* O, *est le barycentre des cinq points* A, B, C, D *et* O *affectés des coefficients* 1, 1, 1, 1, — 1.

On a aussi la proposition que voici :

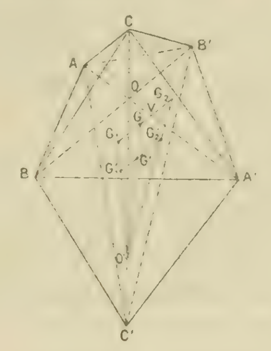
Le centre de gravité d'un octaèdre dont les diagonales

AA′, BB′, CC′ *concourent en un point* O *est le barycentre des points* A, A′, B, B′, C, C′, O *affectés des coefficients* 1, 1, ..., 1, — 2. (Fontené).

SOLUTION

Par M. E. Brand.

Considérons A B A′ B′ comme base commune de deux pyramides quadrangulaires : soit G le centre de gravité de l'aire du quadrilatère, son coefficient sera 3.



Portons sur C′C la longueur C′O′ égale à O et affectons les points C, C′ et O des coefficients 1, 1, — 1.

Les deux points C et C′ avec les coefficients 1, 1 pourront être remplacés par les points O et O′ avec les mêmes coefficients. Ce qui conduira à chercher le barycentre des points O′ et G affectés des coefficients 1 et 3. Ce barycentre sera en G′ sur O′G′ et au quart de la distance à partir de G.

La proposition est démontrée si G′ est le centre de gravité du solide considéré.

Or, on peut prouver d'abord, après Lhuilier (*Annales de Gergonne*, 1812–1813), que, si l'on a un solide composé de deux pyramides triangulaires possédant une base commune, en prenant le point O de percée de la droite CC′ avec la base ABA′, puis le point O′ tel que C′O′ = CO, le centre de gravité du solide sera sur $O'G_1$ et au quart à partir de G_1 (G_1 étant le centre de gravité de la base). En effet, soit $4p$ la masse du tétraèdre C′ABA′ et $4q$ celle du tétraèdre C′ABA′, on aura CO : OC′ = C′O′ : O′C = $p : q$.

A la masse $4p$, on substitue les quatre masses p aux sommets C, A, B, A′; à la masse $4q$, on substitue les quatre masses q aux sommets C′, A, B, A′. Les trois masses $p + q$

des sommets A, B, A′ peuvent être remplacées par une masse $3(p+q)$ en G_1; les masses p et q en C et C′ peuvent être remplacées par la masse $(p+q)$ en O′. Donc, finalement, on peut remplacer toutes les masses par une seule en G'_1 située sur $O'G_1$ et au quart à partir de G_1. Donc, G'_1 est le centre de gravité du solide CABA′C′.

Cette proposition est encore vraie si la base commune des deux pyramides est un quadrilatère ABA′B′. En le décomposant en deux triangles et appelant G_2 le centre de gravité du triangle AA′B′, le centre de gravité du solide CAA′B′C′ sera en G'_2 situé sur $O'G_2$ et au quart à partir de G_2.

Le centre de gravité G′ du solide total CABA′B′C′ sera sur $G'_1 G'_2$ en un point G′, tel que l'on ait

$$\frac{G'_1 G'}{G'_2 G'} = \frac{\text{vol. CAB'A'C'}}{\text{vol. CABA'C'}} = \frac{B'O}{BO} = \frac{G_2 V}{G_1 V} = \frac{G_1 G}{G_2 G}$$

(O étant le point de concours des diagonales du quadrilatère, V le point de rencontre de $G_1 G_2$ avec AA′ et G étant tel que $G_1 V = G G_2$).

Il est facile de voir que G est le centre de gravité du quadrilatère ABA′B′, et à cause de

$$\frac{G'_1 G'}{G'_2 G'} = \frac{G_1 G}{G_2 G},$$

on conclut que G′ est sur O′G et au quart à partir de G.

Cette proposition de Lhuilier est vraie, que les diagonales se coupent ou ne se coupent pas en un même point.

ERRATA.

3e série, t. XVI, 1897 : Page 493, ligne 7, en remontant, *au lieu de* relation, *lire* rotation.

Page 496, ligne 3, *au lieu de* peuvent être adjoints ces points, *lire* peut être adjoint le point.

Page 500, ligne 10, *au lieu de* sur le cercle K, *lire* à l'intérieur du cercle K.

Page 500, ligne 7, en remontant, *au lieu de* basée sur la théorie des fonctions modulaires, *lire* faisant la base de la théorie des fonctions modulaires.

Page 593, le renvoi au bas de la page se rapporte à M. A. Thévenet. Dans le renvoi, *au lieu de* 1879, *lire* 1897.

[$M^3 5 h \beta$]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

PAR M. E. DUPORCQ (1).

Dans ce qui va suivre, nous appellerons :

1° *Cubique équilatère* une cubique gauche dont les trois asymptotes sont deux à deux rectangulaires. (Exemple : la cubique des normales à l'ellipsoïde.)

2° *Tétraèdre orthocentrique* un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales. Dans un tel tétraèdre, les hauteurs sont concourantes; le point de concours des hauteurs est aussi le point par lequel passent les perpendiculaires communes aux arêtes opposées; enfin ce tétraèdre est conjugué par rapport à une sphère qui a son centre au point de rencontre des hauteurs.

Cela posé, on propose de démontrer les propriétés suivantes :

I. *Si deux cordes* AB, CD *d'une cubique équilatère sont orthogonales, le tétraèdre* ABCD *est orthocentrique.*

II. *Si une cubique gauche* quelconque *passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique, elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique.*

III. *Toute cubique équilatère circonscrite à un tétraèdre orthocentrique passe par le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre.*

(1) Mémoire ayant obtenu le prix.

IV. *Toute cubique passant par les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique est équilatère.*

V. *Si l'on coupe une cubique équilatère par une série de plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ayant pour sommets les points de rencontre de la cubique et des plans est la sécante double de la cubique normale aux plans secants.*

VI. Soit Σ une sphère de rayon R et dont le centre O est sur une cubique équilatère. Il existe une infinité de tétraèdres ABCD inscrits à la cubique et conjugués par rapport à Σ.

1° *Le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une droite.*

2° *On considère les sphères* S *circonscrites aux tétraèdres* ABCD; *le lieu des centres de ces sphères est une droite. — Comment se déplace cette droite lorsque* O *restant fixe* R *varie?*

3° *Chaque sphère* S *coupe la cubique en deux autres points* E *et* F. *Démontrer que ces points sont fixes et ne dépendent pas de* R.

4° *Lorsque* O *varie, la droite* EF *décrit une quadrique et le plan* OEF *enveloppe un cône du deuxième degré.*

5° *Lorsque* O *varie, le milieu de* EF *décrit une cubique équilatère.*

Nous commencerons par rappeler que, s'il existe un triangle inscrit à une conique C′ et conjugué à une conique C, il en existe une infinité jouissant de la même propriété : on dit que la conique C′ est *harmoniquement circonscrite* à la conique C. De même, une quadrique Q′

est harmoniquement circonscrite à une quadrique Q, quand il existe un tétraèdre à la fois inscrit à Q′ et conjugué à Q, et il y a alors une infinité de tétraèdres analogues. A ces propriétés correspondent par dualité des propriétés relatives aux coniques ou aux quadriques *harmoniquement inscrites*.

La condition, qui exprime qu'une conique ou qu'une quadrique est harmoniquement circonscrite à une conique ou à une quadrique donnée, étant linéaire, on voit que, si deux coniques ou deux quadriques sont harmoniquement circonscrites à une troisième, il en sera de même de toutes les coniques ou quadriques du faisceau linéaire déterminé par les deux premières. En particulier :

Étant donnée une conique C′ harmoniquement circonscrite à une conique C, si un quadrangle inscrit dans C′ est tel que l'un des couples de ses côtés opposés soit formé de deux droites conjuguées à C, il en est de même des deux autres couples.

Par dualité, cette propriété se transforme en la suivante qui nous servira dans la suite :

Étant donnée une conique C′ harmoniquement inscrite à une conique C, si un quadrilatère circonscrit à C′ est tel que l'un des couples de ses sommets opposés soit formé de points conjugués à C, il en est de même des deux autres couples.

I. Ceci posé, soient A, B, C, D, L, M, N sept points d'une cubique gauche quelconque. Considérons la conique suivant laquelle cette cubique se projette du point A sur le plan LMN : à cette conique sont inscrits le triangle LMN et le triangle formé par les traces du

trièdre ABCD : ces deux triangles étant inscrits à une même conique, il existe, comme on sait, une conique tangente à leurs six côtés : on déduit de là que la conique, inscrite au triangle LMN et tangente à deux faces du tétraèdre ABCD, est tangente aux deux autres faces. Autrement dit :

Si sept points A, B, C, D, L, M *et* N *appartiennent à une même cubique gauche, il existe une conique* Γ, *inscrite à la fois au triangle* LMN *et au quadrilatère formé par les traces du plan* LMN *sur les faces du tétraèdre* ABCD.

Si les points L, M et N sont les points à l'infini d'une cubique gauche équilatère, c'est-à-dire les sommets d'un triangle conjugué à l'ombilicale, la conique Γ sera harmoniquement inscrite à l'ombilicale et inscrite au quadrilatère qui admet pour sommets les points à l'infini des arètes du tétraèdre ABCD. Si donc deux sommets opposés de ce quadrilatère sont des points conjugués à l'ombilicale, il en sera de même des deux autres couples de sommets opposés : autrement dit, si deux arètes opposées du tétraèdre ABCD sont orthogonales, il en sera de même de deux arètes opposées quelconques, et ce tétraèdre sera orthocentrique.

II. Soit Γ une cubique gauche circonscrite à un tétraèdre T conjugué à une quadrique Q ; toutes les quadriques qui contiennent cette cubique sont alors harmoniquement circonscrites à Q : par suite, α étant un point quelconque de Γ, elles couperont le plan polaire P de α par rapport à Q suivant des coniques harmoniquement circonscrites à cette quadrique. Or ces coniques ne sont évidemment assujetties qu'à passer par les trois points β, γ et δ où le plan P coupe la cubique Γ : il

faut donc que le triangle $\beta\gamma\delta$ soit conjugué à la quadrique Q. Ainsi :

Le plan polaire P *d'un point quelconque* α *de la cubique* Γ *coupe cette courbe aux trois sommets d'un triangle conjugué à la quadrique* Q.

Réciproquement :

Si un triangle $\beta\gamma\delta$ *inscrit à la cubique* Γ *est conjugué à la quadrique* Q, *le pôle* α *du plan* $\beta\gamma\delta$ *par rapport à* Q *sera sur la cubique.*

En effet, le plan polaire de β par rapport à Q doit couper la cubique aux sommets d'un triangle conjugué à Q, et, comme γ et δ sont deux de ces sommets, le troisième est nécessairement α.

Nous dirons que la cubique Γ est *harmoniquement circonscrite* à la quadrique Q.

III et IV. Supposons que le tétraèdre T soit orthocentrique et que la quadrique Q soit la sphère Σ conjuguée à ce tétraèdre. D'après ce qui précède, toute cubique gauche circonscrite au tétraèdre T et passant par le centre O de Σ coupera le plan polaire de O par rapport à Σ, c'est-à-dire le plan de l'infini, aux trois sommets d'un triangle conjugué à l'ombilicale : autrement dit, cette cubique sera équilatère.

Réciproquement, toute cubique équilatère circonscrite au tétraèdre T passera par le point O.

V. Soient B, C, D les points d'intersection d'une cubique équilatère avec un plan P, et AO la sécante double de cette cubique, normale au plan P. Il existe une sphère Σ de centre O telle que le point A soit par rapport à elle le pôle du plan P, et la cubique Γ est harmo-

niquement circonscrite à cette sphère, puisqu'elle passe par son centre et qu'elle est équilatère. Le tétraèdre ABCD est donc conjugué à la sphère Σ, et la droite AO passe, par suite, par l'orthocentre du triangle BCD. Ce point décrit donc bien la droite AO quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même.

Si le plan P est perpendiculaire à une tangente à la cubique, la sécante AO se confond avec cette tangente, et le trièdre ABCD est trirectangle.

VI. Nous venons d'obtenir une infinité de tétraèdres ABCD inscrits à la cubique Γ, admettant même orthocentre O et un sommet commun A. Il est facile de voir que les sphères S circonscrites à ces tétraèdres passent par un cercle fixe.

Il existe, en effet, une quadrique H passant par la cubique Γ et admettant pour direction de plan cyclique celle du plan P ; soit Q la direction conjuguée de plans cycliques. La quadrique H et la sphère S ont en commun la circonférence (BCD) : elles ont donc une autre circonférence commune, et celle-ci est évidemment la section de la quadrique H par le plan de direction Q mené par A, c'est-à-dire la circonférence (AEF), en désignant par E et F les points où ce plan coupe la cubique.

1°, 2° et 3° [1]. Ainsi, si l'on considère deux tétraèdres orthocentriques, inscrits à la cubique Γ, ayant même orthocentre O, et admettant un sommet commun A, les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux mêmes points E et F de la cubique. Il est facile de voir que cette condition, imposée aux tétraèdres, d'avoir

(1) Ces trois parties sont résolues dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles sont énoncées.

un sommet commun, est superflue et que les points E et F ne dépendent que du point O.

Soient, en effet, ABCD et $A'B'C'D'$ deux tétraèdres orthocentriques inscrits à Γ et de même orthocentre O. Considérons le plan $B'C''D''$ mené par B' parallèlement au plan BCD, et qui coupe la cubique en C'' et D''. Les tétraèdres ABCD et $A'B'C'D'$ ont chacun un sommet commun avec le tétraèdre $AB'C''D''$, qui admet également O pour orthocentre. Par suite, les sphères circonscrites aux deux premiers tétraèdres coupent la cubique en deux mêmes points de la sphère circonscrite au troisième.

On sait qu'une sphère harmoniquement circonscrite à une quadrique en coupe orthogonalement la sphère orthoptique ; si donc les tétraèdres ABCD considérés sont conjugués à une même sphère Σ de rayon R, les sphères S couperont orthogonalement la sphère de centre O et de rayon $R\sqrt{3}$. Comme elles doivent, d'autre part, passer par les points E et F, elles auront une circonférence commune dans le plan OEF et leurs centres ω seront sur une même perpendiculaire Δ à ce plan ; cette droite Δ se déplacera parallèlement à elle-même dans le plan perpendiculaire au milieu du segment EF, quand le rayon R variera.

Soient G le centre de gravité d'un des tétraèdres considérés, g le centre de gravité de l'une de ses faces, enfin O_1, G_1 et ω_1 les projections orthogonales sur cette face des points O, G et ω. On sait que G_1 divise le segment $O_1 g$ dans le rapport $\frac{3}{1}$, et que g divise le segment $O_1 \omega_1$ dans le rapport $\frac{2}{3}$. Il en résulte que G_1 est le milieu de $O_1 \omega_1$ et, par suite, G le milieu de $O\omega$. Le lieu du point G est donc la droite parallèle à Δ, située dans le plan $O\Delta$ et équidistante de la droite Δ et du point O.

4° A tout point O de la cubique Γ correspond, comme nous l'avons vu précédemment, une sécante double EF ; de notre démonstration il résulte de plus que, si O′ désigne un point quelconque de la cubique, auquel correspond de même une sécante double E′F′, les plans O′EF et OE′F′ sont parallèles, leur direction commune et celle des plans normaux à OO′ étant deux directions cycliques conjuguées d'une même quadrique H, contenant la cubique Γ.

Par un point arbitraire Ω menons les parallèles Ωα et Ωα′ aux cordes EF et E′F′ ; quand le point O′ se rapproche indéfiniment du point O sur la cubique, le plan Ωαα′ tend à devenir le plan tangent le long de l'arète Ωα au cône engendré par cette droite, et sa direction coïncide alors avec celle du plan OEF ; nous voyons donc que :

Si l'on considère le cône décrit par la droite Ωα, *le plan* OEF *est parallèle au plan tangent à ce cône le long de l'arête* Ωα.

Nous allons chercher à déterminer ce cône. Remarquons, à cet effet, que la direction du plan Ωαα′ et celle des plans normaux à OO′, directions cycliques conjuguées d'une quadrique H passant par la cubique, sont aussi des directions cycliques du cône asymptote de cette quadrique, cône dont trois arètes sont parallèles aux asymptotes de la cubique Γ. Considérons le trièdre OXYZ formé par les parallèles menées par le point O à ces arètes : il nous suffit évidemment de prendre les points d'intersection 1, 2, 3 des arètes du trièdre OXYZ avec un plan normal à OO′, et de faire passer par ces trois points une sphère qui coupe les arètes en trois nouveaux points 1′, 2′, 3′ pour obtenir un plan 1′2′3′, parallèle aux plans OE′F′ et O′EF. Remarquons que les

droites 1 2 et 1′2′ sont antiparallèles dans l'angle XOY; par suite, comme la projection sur le plan XOY de la normale OO′ au plan 1 2 3 est perpendiculaire à la droite 1 2, cette projection et la trace du plan OE′F′ sont symétriques par rapport aux côtés de l'angle XOY. Il en est de même pour les autres faces du trièdre. On déduit aisément de là la propriété suivante : soient Ox et Oy les traces des faces ZOX et ZOY sur un plan quelconque normal à OZ; soit m la trace sur ce plan de la droite OO′, et M la droite qui joint les projections de m sur Ox et Oy : *le plan* OE′F′ *et le plan* OM *sont symétriques par rapport à la droite* OZ.

Or, il est facile de voir que si le point m décrit une hyperbole passant par O et ayant des asymptotes parallèles à Ox et Oy, la droite M passera constamment par le centre a de cette hyperbole; c'est justement ce qui a lieu quand le point O′ décrit la cubique : l'hyperbole équilatère décrite par le point M a alors pour asymptotes les traces sur le plan xOy des plans déterminés par le point O et par les asymptotes de la cubique respectivement parallèles à Ox et Oy : la droite Oa s'appuie donc sur ces deux asymptotes, et le plan OE′F′ passe constamment par la symétrique de Oa par rapport à OZ. Nous retrouvons donc ainsi que ce plan passe par une droite fixe, que nous savons parallèle à EF. Ainsi :

La droite EF, *correspondant à un point* O *de la cubique, est, en direction, symétrique, par rapport à l'une quelconque des asymptotes de la cubique, de la droite qui passe par* O *et rencontre les deux autres asymptotes.*

Or, cette droite Oa, qui s'appuie sur la cubique et deux de ses asymptotes, Δ_x et Δ_y, engendre évidemment

une quadrique U. Quand le point O s'éloigne à l'infini dans la direction de Δ_z, la droite Oa correspondante est la parallèle à Δ_z qui rencontre Δ_x et Δ_y, c'est-à-dire la génératrice parallèle à Δ_z dans l'hyperboloïde, H, défini par les trois asymptotes : les plans asymptotes aux quadriques U et H menés par l'asymptote Δ_z sont donc confondus. Si, maintenant, par un point fixe Ω, nous menons les parallèles aux droites Oa, elles engendrent un cône du second degré qui passe par la parallèle $\Omega\zeta$ à Δ_z, et le plan tangent à ce cône le long de cette génératrice a la direction du plan asymptote que nous venons de considérer. Les parallèles $\Omega\alpha$ aux droites EF, étant symétriques des droites Ωa par rapport à $\Omega\zeta$, engendreront un cône du second degré ayant, le long de $\Omega\zeta$, le même plan tangent que le cône des droites Ωa. Nous trouverions de même les plans tangents au cône décrit par $\Omega\alpha$, le long des génératrices parallèles à Ox et Oy, et nous en concluons que :

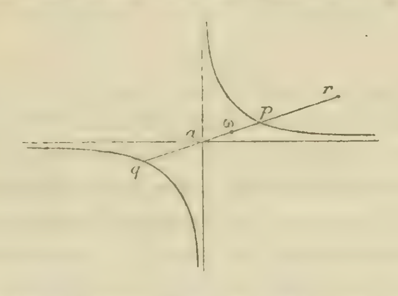
Le cône engendré par les parallèles $\Omega\alpha$ à EF est identique au cône asymptote de l'hyperboloïde, H, qui passe par les trois asymptotes de la cubique.

Les droites EF décrivent donc la quadrique homothétique à ce cône et qui passe par Γ, et, comme nous avons vu que le plan OEF est parallèle au plan tangent à ce cône le long de l'arête $\Omega\alpha$, nous obtenons finalement le résultat suivant :

La droite EF engendre une quadrique passant par la cubique Γ, et ayant le même cône asymptote que l'hyperboloïde H, qui passe par les trois asymptotes de cette cubique. Ce cône asymptote est d'ailleurs l'enveloppe du plan OEF.

5° Projetons orthogonalement la cubique Γ sur un

plan perpendiculaire à l'asymptote Δ_z : nous obtenons une hyperbole équilatère, γ, passant par la trace p de Δ_z et admettant pour asymptotes les projections des asymptotes Δ_x et Δ_y. Soit a son centre, ω le milieu de pa et q le symétrique de p par rapport à a. Le point ω est évidemment la projection du centre de l'hyperboloïde H, qui coïncide, comme nous venons de le voir, avec celui de la quadrique Q engendrée par EF. Le plan $\Delta_z aq$ étant d'ailleurs un plan asymptote de la quadrique Q la coupe suivant deux droites parallèles à Δ_z : celle



d'entre elles qui appartient au système des génératrices EF (sécantes doubles de la cubique) se projette évidemment au point q : le point r, symétrique de q par rapport à ω, est donc la projection de l'autre, qui appartient au système différent de génératrices et rencontre, par conséquent, toutes les droites EF. Les projections de celles-ci passent donc par r ; le lieu du milieu des cordes EF a donc pour projection le lieu des milieux des segments interceptés par l'hyperbole γ sur les droites passant par r. Or ce dernier lieu est évidemment l'hyperbole symétrique, par rapport à ω, de l'hyperbole γ. Les points de la quadrique Q qui se projettent sur ce lieu sont donc diamétralement opposés à ceux de la cubique Γ. Donc :

Le lieu des milieux des cordes EF *est la cubique*

gauche symétrique de la cubique Γ par rapport au centre de l'hyperboloïde H.

[I12b]

SUR LES FORMES ARITHMÉTIQUES LINÉAIRES A COEFFICIENTS RÉELS QUELCONQUES;

Par M. A. HURWITZ.

Göttinger Nachrichten, 1897. Cahier XV.

Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.

M. Minkowski, dans son Livre *Geometrie der Zahlen* (1), a énoncé et démontré le théorème suivant, remarquable tant par son caractère élémentaire que par les nombreuses applications qu'il comporte :

Dans n formes linéaires homogènes entières à n variables, à coefficients réels quelconques et de déterminant Δ *différent de zéro, on peut toujours donner aux variables des valeurs numériques entières qui ne soient pas toutes nulles et telles que chacune des formes ait une valeur absolue*

$$\leq \sqrt[n]{\text{abs.}\,\Delta}.$$

---

(1) H. Minkowski, *Géométrie des nombres*, p. 104; Leipzig, 1896. Relativement aux applications du théorème à la théorie des formes quadratiques et à la théorie des corps de nombres algébriques, comparez § 14-47 du Livre précité, et ensuite le Mémoire de M. Minkowski, *Sur les formes quadratiques positives et les algorithmes analogues aux fractions continues* (*Journal de Crelle*, t. 107, p. 278 et suiv.), et le Compte rendu présenté par M. Hilbert à la Deutsche Mathematiker Vereinigung : *la Théorie des corps de nombres algébriques*, théorèmes 42-47 et théorème 50.

M. Minkowski m'a communiqué une démonstration purement arithmétique de ce théorème, due à M. Hilbert, et qui sera reproduite dans le second fascicule de la *Géométrie des nombres*. Inspiré par cette Communication, j'ai trouvé une nouvelle démonstration, reposant sur des principes analogues, où l'on emploie des méthodes auxiliaires très simples, et qui se recommande par son peu de longueur. J'expose cette démonstration dans les pages suivantes.

I

Soient

(1) $$f_i = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \ldots + a_{ni}u_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n formes linéaires à coefficients numériques entiers des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Le déterminant de ces formes, dont la valeur absolue sera désignée par

(2) $$\text{abs}\,|a_{ki}| = D,$$

sera, par hypothèse, différent de zéro.

Conformément aux définitions de Kronecker, deux formes linéaires φ, ψ à coefficients numériques entiers des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seront dites congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire satisferont à la formule

(3) $$\varphi \equiv \psi \qquad (\text{mod}\, f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

lorsque la différence $\varphi - \psi$ est représentable sous la forme

(4) $$\varphi - \psi = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des nombres entiers. Au cas contraire, φ et ψ sont dites incongrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Maintenant le point essentiel sur lequel repose la dé-

monstration que nous allons exposer est le théorème suivant :

Le nombre des formes linéaires incongrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est égal à D.

Ce théorème a déjà été démontré différemment sous une autre forme [1]. Néanmoins, pour éviter les lacunes, nous l'établirons ici rapidement.

Si l'on désigne par k un des nombres 1, 2, ..., n, la congruence

$$(5)\quad \begin{cases} \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \ldots + \delta_{k,n} u_n \equiv 0 \\ \pmod{f_1, f_2, \ldots, f_n}, \end{cases}$$

où les nombres entiers δ_k, $\delta_{k,k+1}$, $\delta_{k,n}$ doivent être regardés comme les inconnues, possède des solutions où δ_k est un nombre positif (qui n'est pas nul). En effet, on a évidemment

$$Du_k \equiv 0 \pmod{f_1, f_2, \ldots, f_n}.$$

Parmi les solutions de (5), choisissons-en une où δ_k soit positif et le plus petit possible, et posons alors

$$(6)\quad g_k = \delta_k u_k + \delta_{k,k+1} u_{k+1} + \ldots + \delta_{k,n} u_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si φ est une forme linéaire quelconque à coefficients numériques entiers, on peut choisir les nombres t_1, t_2, ..., t_n tels que la forme

$$(7)\quad \varphi - t_1 g_1 - t_2 g_2 - \ldots - t_n g_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

satisfasse aux conditions

$$(8)\quad 0 \leq c_1 < \delta_1, \quad 0 \leq c_2 < \delta_2, \quad \ldots, \quad 0 \leq c_n < \delta_n.$$

---

[1] Comparez, par exemple, Frobenius : *Théorie des formes linéaires à coefficients entiers* (*Journal de Crelle*, t. 86, p. 174 et suiv.).

Ensuite deux formes différentes

(9) $$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$$

satisfaisant à ces conditions ne peuvent pas être congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$, car, en les retranchant l'une de l'autre, on obtiendrait une forme dont l'existence est exclue par le mode même de détermination des formes g_k.

De là résulte que chaque forme linéaire φ est congrue à une seule et unique des $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$ formes (9) qui sont caractérisées par les inégalités (8). En particulier, chaque forme congrue à zéro pour les modules f_1, $f_2, \ldots, f_n$ est représentable sous la forme

$$t_1g_1 + t_2g_2 + \ldots + t_ng_n,$$

d'où il résulte que non seulement les formes g_1, $g_2, \ldots, g_n$ peuvent être exprimées sous la forme de fonctions linéaires homogènes à coefficients numériques entiers des formes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, mais encore que la réciproque ([1]) est vraie. Par conséquent, les valeurs absolues des déterminants des deux systèmes de formes sont identiques et, par suite, le nombre $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$ des formes linéaires incongrues pour les modules f_1, $f_2, \ldots, f_n$ est égal à D.

II.

Soit $r+1$ le premier nombre entier qui surpasse $\sqrt[n]{D}$, en sorte que l'on ait

(1) $$r^n \leqq D < (r+1)^n.$$

Parmi les $(r+1)^n$ formes

(2) $$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n,$$

([1]) Par la réciproque, nous entendons les mêmes quatre dernières lignes du texte où l'on remplacera g par f et f par g. L. L.

qui sont caractérisées par les inégalités

$$(3) \qquad 0 \leq c_1 \leq r, \qquad 0 \leq c_2 \leq r, \qquad \ldots, \qquad 0 \leq c_n \leq r,$$

il en existe alors certainement deux différentes, qui sont congrues pour les modules $f_1, f_2, \ldots, f_n$. La forme

$$(4) \qquad y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n,$$

que l'on obtient en retranchant l'une de l'autre deux pareilles formes, a ses coefficients compris entre $-r$ et $+r$, et, par conséquent, ceux-ci sont en valeur absolue $\leq \sqrt[n]{\mathrm{D}}$. Enfin, cette forme est représentable sous la forme

$$(5) \quad y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_n u_n = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des nombres qui ne sont pas tous nuls. En comparant les coefficients de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans l'équation (5), on reconnaît que :

Si

$$(6) \qquad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont n formes linéaires à coefficients numériques entiers des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de déterminant différent de zéro et égal en valeur absolue à D, *on peut toujours donner aux variables des valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles, telles que chacune des formes ait une valeur absolue* $\leq \sqrt[n]{\mathrm{D}}$.

Comme on le reconnaît, c'est là le théorème de Minkowski pour les formes à coefficients numériques *entiers*.

III.

Soient maintenant

$$(1) \qquad r_{i1} x_1 + r_{i2} x_2 + \ldots + r_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n formes linéaires à coefficients rationnels. La valeur absolue de leur déterminant Δ est supposée différente de zéro. Choisissons le nombre entier positif g tel que les formes

(2) $g(r_{i1}x_1 + r_{i2}x_2 + \ldots + r_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

aient des coefficients numériques entiers. Puisque la valeur absolue du déterminant de ces formes est $g^n\Delta$, on peut, au moyen de valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles, attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rendre toutes ces formes $\leq g\sqrt[n]{\Delta}$ en valeur absolue, et, par conséquent, rendre toutes les premières formes (1) $\leq \sqrt[n]{\Delta}$ en valeur absolue. On a, de la sorte, démontré le théorème de Minkowski pour les formes à coefficients *rationnels*.

IV.

Pour étendre maintenant le théorème aux formes à coefficients *quelconques* on a besoin d'un théorème auxiliaire que nous allons d'abord démontrer.

Une réunion de plusieurs systèmes (en nombre fini ou infini), chacun de n formes linéaires, sera nommé un « ensemble » de systèmes de formes ([1]). Nous considérerons un tel ensemble, satisfaisant aux conditions suivantes :

On pourra déterminer deux grandeurs positives δ et ε telles que, pour chaque système quelconque de formes

(1) $y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$

qui appartient à l'ensemble, chaque coefficient c_{ik} soit

([1]) G. Cantor, *Contribution à l'exposition de la Théorie des ensembles transfinis* (*Math. Ann.*, t. LXVI, p. 481) et Travaux précédents du même auteur.

en valeur absolue inférieur à δ, et que la valeur absolue du déterminant $|c_{ik}|$ soit supérieure à ε.

Maintenant, soit (1) un système déterminé de formes, pris dans l'ensemble, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de nombres entiers, pour lesquels les valeurs des formes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soient toutes en valeur absolue $\leqq$ G, G désignant une grandeur positive assignée. Les solutions des équations (1) peuvent être désignées par

$$(2)\qquad x_i = \gamma_{1i}y_1 + \gamma_{2i}y_2 + \ldots + \gamma_{ni}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

en ce cas γ_{ik} est le sous-déterminant de c_{ik} dans le déterminant $|c_{ik}|$ divisé par le déterminant lui-même.

Puisque chacun des $(n-1)!$ éléments de ce sous-déterminant est, pris en valeur absolue, inférieur à δ^{n-1}, on a

$$(3)\qquad \text{abs}\,\gamma_{ik} < (n-1)!\,\frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon},$$

et, par suite,

$$(4)\qquad |x_i| < n!\,\frac{\delta^{n-1}}{\varepsilon}\,G \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette limite, pour les valeurs absolues des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ne dépend que de δ, ε, G. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un système de valeurs numériques entières, pour lequel les formes d'un système de formes pris dans l'ensemble sont toutes prises en valeur absolue, $\leqq$ G, ce système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se trouve nécessairement parmi un nombre fini de systèmes de valeurs qui dépendent exclusivement de δ, ε, G.

[Si l'on représente chaque système de valeurs numériques entières $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par un point d'un espace à n dimensions, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

le théorème précédent apparaît comme conséquence de ce fait que la totalité des points dont les coordonnées ont pour valeur des nombres entiers (*points d'un réseau*), forme un ensemble de points sans points-limites (Haüfungsstelle) à distance finie].

V.

Les formes

$$(1)\qquad c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

peuvent maintenant avoir des coefficients réels quelconques et un déterminant Δ différent de zéro. Alors chaque coefficient c_{ik} sera représenté par une série fondamentale de Cantor

$$(2)\qquad c_{ik} = \left(r_{ik}^{(1)}, r_{ik}^{(2)}, \ldots, r_{ik}^{(\lambda)}, \ldots\right),$$

en sorte que $r_{ik}^{(\lambda)}$ désigne, par suite, un nombre rationnel qui, pour λ croissant indéfiniment, tend vers la limite c_{ik}. Si l'on désigne par $\Delta^{(\lambda)}$ le déterminant du système de formes

$$(3)\qquad r_{i1}^{(\lambda)}x_1 + r_{i2}^{(\lambda)}x_2 + \ldots + r_{in}^{(\lambda)}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a évidemment

$$(4)\qquad \lim_{\lambda = \infty} \Delta^{(\lambda)} = \Delta.$$

Si l'on convient maintenant d'attribuer à λ les valeurs 1, 2, 3, ..., on tirera de (3) un ensemble de systèmes de formes qui satisfait aux conditions du précédent paragraphe quand on y supprime les systèmes de formes où l'on aurait $\Delta^{(\lambda)} = 0$. Pour chaque indice λ déterminé, on peut attribuer à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs numériques entières, qui ne sont pas toutes nulles,

telles que

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \left| r_{i1}^{(\lambda)} x_1 + r_{i2}^{(\lambda)} x_2 + \ldots + r_{in}^{(\lambda)} x_n \right| \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs} \Delta^{(\lambda)}} \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

et il existe alors certainement, d'après le théorème du numéro précédent, un pareil système de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui, pour un nombre infini d'indices λ, satisfait aux inégalités (5). Pour un tel système $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut passer à la limite $\lambda = \infty$, et l'on obtient alors

$$(6)\qquad | c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \ldots + c_{in} x_n | \leqq \sqrt[n]{\operatorname{abs} \Delta},$$

et le théorème de Minkowski se trouve maintenant complètement démontré.

VI.

Lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres entiers qui ne sont pas tous nuls et qui satisfont aux inégalités (6), ou bien c'est partout le signe $<$ qui peut avoir lieu dans ces inégalités, ou bien dans une ou plusieurs d'entre elles c'est le signe d'égalité qui peut avoir lieu. Mais nous allons aussi démontrer qu'il est possible de déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de telle sorte que ce soit le signe $<$ qui ait lieu en $n - 1$ quelconques des inégalités (6), dans les $(n - 1)$ dernières, par exemple [1].

Si l'on désigne par $k_1, k_2, \ldots, k_n$, n grandeurs positives qui satisfont à la condition

$$(1)\qquad k_1 k_2 \ldots k_n = \operatorname{abs} \Delta,$$

[1] Minkowski, *Géométrie des nombres*, p. 106.

les formes

$$(2)\qquad \frac{1}{k_i}(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ont pour déterminant ± 1.

Par conséquent, on peut déterminer les nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne sont pas tous nuls, tels que l'on ait

$$(3)\qquad |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| \leqq k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Choisissons maintenant une suite de grandeurs positives

$$(4)\qquad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_\lambda, \quad \ldots,$$

qui soient toutes $< \sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta}$ et qui satisfassent à la condition $\lim\limits_{\lambda = \infty} \varepsilon_\lambda = 0$, et déterminons, pour chaque indice λ, la grandeur positive ε'_λ au moyen de l'équation

$$(5)\qquad \left(\sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta} + \varepsilon'_\lambda\right)\left(\sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta} - \varepsilon_\lambda\right)^{n-1} = \text{abs}\,\Delta.$$

On a évidemment aussi

$$\lim_{\lambda = \infty} \varepsilon'_\lambda = 0.$$

Maintenant, pour chaque indice λ, les inégalités

$$(6)\qquad \begin{cases} |c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n| < \sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta} + \varepsilon'_\lambda, \\ |c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| < \sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta} - \varepsilon_\lambda \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

pourront être satisfaites [en vertu de (3)]. Et, d'après le paragraphe IV, on peut supposer qu'un seul et même système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfait aux inégalités (6) pour un nombre infini d'indices λ. Alors, pour un pareil système, on aura

$$|c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n| \leqq \sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

et le passage à la limite $\lambda = \infty$ nous montre que l'on a, en même temps,

$$|c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n| \leq \sqrt[n]{\text{abs}\,\Delta}.$$

[$L^1$7d]

SUR UNE PROPRIÉTÉ FOCALE DES CONIQUES;

Par M. G. GALLUCCI.

---

1. *Deux tangentes quelconques d'une conique et les perpendiculaires abaissées des foyers sur ces tangentes touchent une autre conique.*

Soient AB, AC les deux tangentes, F, F′ les deux foyers, R, Q, R′, Q′ leurs projections sur AB, AC et M la projection de A sur l'axe focal FF′ (¹). Les points A, M, R, Q sont sur le cercle décrit sur AF comme diamètre et les points A, M, R′, Q′ sur le cercle décrit sur AF′ comme diamètre; mais R, Q, R′, Q′ sont sur la podaire des foyers; donc les trois droites RQ, R′Q′, AM concourent en un point A_1 qui est le centre radical des trois cercles précédents. La droite AM est donc la polaire du point $A' \equiv RQ'.R'Q$ par rapport à la podaire des foyers et, par conséquent, ce point doit se trouver sur le diamètre perpendiculaire à AM, c'est-à-dire sur FF′. Il résulte de tout cela que l'hexagone des droites AB, RF, QF, AC, F′Q′, F′R′ est un hexagone de Brianchon.

2. Dans un triangle ABC, soient F, F′ deux points inverses, P, Q, R, P′, Q′, R′ leurs projections sur BC, CA, AB; posons : $A' \equiv RQ'.R'Q$, $B' \equiv RP'.R'P$,

---

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

$C' \equiv PQ'.P'Q$, $A_1 \equiv RQ.R'Q'$, $B_1 \equiv RP.R'P'$, $C_1 \equiv PQ.P'Q'$. On a les propriétés suivantes :

1° *Les points* A', B', C' *sont sur* FF' ;

2° *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont perpendiculaires à* FF';

3° *La droite* AA' *passe par* B_1 *et* C_1 ; *de même* BB' *passe par* C_1 *et* A_1 *et* CC' *passe par* A_1 *et* B_1 ;

4° *Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est conjugué par rapport au cercle des points* P, Q, R, P′, Q′, R′;

5° *Le triangle* ABC *et celui des droites* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *sont réciproques par rapport au même cercle*;

6° *Les droites* $P'A_1$, $Q'B_1$, $R'C_1$ *concourent sur le même cercle, ainsi que les droites* PA′, QB′, RC′.

Les propriétés 1° et 2° sont établies par le raisonnement précédent; les autres s'en déduisent très facilement. Toutes ces propriétés ont été données par H. Schröter dans le cas particulier où P, Q, R sont les milieux des côtés et P′, Q′, R′ les pieds des hauteurs.

Voir : Schröter, *Steiner's Vorlesung über Geometrie*, 2e Partie, p. 84; Franke, *Ueber gewisse Linien im Dreiecke* (*Journal de Crelle*, vol. 99, p. 161); Schröter, *Bemerkung zu dem Aufsatze von Herrn Franke* (*Journal de Crelle*, vol. 99, p. 233).

[H11] [J4a]

SUR LA CONVERGENCE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

Par M. E.-M. LÉMERAY.

Dans un article précédent (¹) j'ai étudié la convergence de la substitution

$$x, fx$$

(¹) *Voir* p. 306; 1897.

vers une racine a de l'équation $fx - x = 0$, quand la fonction donnée fx est holomorphe dans le voisinage du point a, et quand la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ prend en ce point une valeur dont le module est 1, et l'argument $\frac{2k\pi}{n}$, k étant plus petit que n et premier avec lui. J'ai montré qu'alors les n premières dérivées de la différence $f^n x - x$ sont nulles pour $x = a$ et que, en supposant la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de cette même différence non égale à 0 pour $x = a$, il existe, dans un cercle infiniment petit décrit autour du point a, n secteurs de convergence et n secteurs de divergence pour la substitution proposée; ces secteurs ont tous même amplitude et alternent entre eux.

Considérons, à présent, le cas où la première dérivée de la différence $f^n x - x$, qui ne s'annule pas en a, est d'ordre $m + 1$, m étant nécessairement plus grand que n; les m premières dérivées de $f^n x - x$ étant des fonctions que l'on sait former des m premières dérivées de $fx - x$, le fait se produira s'il existe entre ces dernières certaines relations convenables. Considérons la fonction $y_n = f^n x$; comme elle peut se mettre sous la forme

$$y_n - a = x - a + \frac{A_{m+1}}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} + \ldots,$$

nous pourrons répéter les raisonnements de notre première étude et nous trouverons, autour du point a, non plus n, mais m secteurs de convergence pour la substitution $x, f^n x$; pour obtenir ceux de la substitution proposée, il suffit de remarquer que, lorsque, à une distance très petite de a, on passe de la fonction $f^p x$ à la fonction $f^{p+1} x$, l'argument de la dérivée de la dernière diffère très peu de celui de la dérivée de la première augmenté de $\frac{2k\pi}{n}$. Pour obtenir les secteurs de

convergence de x, fx, on fera tourner ceux de $x, f^n x$, dans le sens négatif, d'un angle égal à $\frac{2(n-1)k\pi}{n}$. Pour que les secteurs de convergence d'une substitution $x, f^q x$ soient les mêmes que ceux de $x, f^n x$, il faut et il suffit que l'angle $\frac{2(n-q)k\pi}{n}$ soit un multiple de $\frac{2k\pi}{m}$; c'est-à-dire

$$mq \equiv 0 \pmod{n}.$$

Si n et m étaient premiers entre eux, un secteur de convergence pour une substitution ne le serait, du moins dans sa totalité, pour aucune autre. Si n et m admettaient un plus grand diviseur commun d, la valeur $\frac{n}{d}$ de q satisferait à la condition ci-dessus, et les secteurs de convergence pour $x, f^n x$ le seraient aussi pour les substitutions

$$x, \quad f^{i\frac{n}{d}} x \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

mais pour celles-là seulement.

Or les deux dernières hypothèses sont inadmissibles et m est toujours multiple de n. En effet, considérons la suite des diverses itératives

$$x, \quad fx, \quad f^2 x, \quad \ldots;$$

pour une valeur donnée de x, ou il y a convergence, ou il y a divergence (écartons le cas où après n itérations on retomberait exactement sur la valeur initiale). Supposons, par exemple, le cas de la convergence, et considérons la suite des itératives

$$x, \quad f^p x, \quad f^{2p} x, \quad \ldots;$$

en partant de la même valeur x que tout à l'heure, nous aurons convergence puisque ces itératives appartiennent elles-mêmes à la première suite; il est donc impossible

d'admettre qu'un secteur de convergence pour une substitution ne le soit pas dans sa totalité pour une autre quelconque; m est donc toujours multiple de n, on est ainsi amené à ce théorème :

Soit a un point-racine de l'équation $fx - x = 0$, fx étant holomorphe dans le voisinage de a; désignons par f^n la $n^{\text{ième}}$ itérative de fx, par p un multiple de n, par $a_1, a_2, \ldots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de fx par rapport à x; par $A_1, A_2, \ldots$ les valeurs que prennent en a les dérivées de $f^n x - x$ par rapport à la même variable, et supposons qu'il existe entre les a_i des relations telles que les p quantités $A_1, A_2, \ldots, A_p$ soient nulles; cela posé, si l'on assujettit les a_i à satisfaire à une nouvelle condition choisie de telle sorte que l'on ait $A_{p+1} = 0$, on a aussi $A_{p+2} = 0$, $A_{p+3} = 0$, $\ldots$, $A_{p+n} = 0$; autrement dit $\frac{p}{n}$ relations convenables sont nécessaires et suffisantes pour que les p premières dérivées de $f^n x - x$ soient nulles pour $x = a$.

Il serait désirable de démontrer directement ce théorème qu'il est d'ailleurs facile de vérifier.

Ainsi, pour $n = 2$, la relation

$$a_1 + 1 = 0$$

entraîne

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$3a_2^2 + 2a_3 = 0$$

entraine

$$A_3 = 0, \qquad A_4 = 0.$$

Jointe aux deux précédentes, la relation

$$2a_5 + 15a_2a_4 - 30a_2^4 = 0,$$

entraîne à son tour

$$A_5 = 0, \qquad A_6 = 0, \qquad \ldots .$$

Pour $n = 3$, la relation

$$a_1 = e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$$

entraîne

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

Jointe à la précédente, la relation

$$(-3a_4 + 15a_2^3 + 2a_2a_3) + e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}(-3a_4 + 3a_2^3 - 14a_2a_3) = 0$$

entraîne

$$A_4 = 0, \qquad A_5 = 0, \qquad A_6 = 0, \qquad \ldots .$$

Serret a montré (*Algèbre supérieure*) que la fonction

$$y = 2\cos\frac{\pi}{n} - \frac{1}{x}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0.$$

Toutes les dérivées de $f^n x - x$ sont nulles au point-racine et d'ailleurs, en tout point, les coefficients de $\frac{x^i}{i!}$, dans le développement de cette fonction, satisfont aux conditions sus-énoncées.

Si une fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f^n x - x = 0,$$

pour une valeur quelconque de x il ne saurait, par définition, exister ni convergence, ni divergence, puisque après n itérations on retombe sur la valeur initiale; c'est ce que montre aussi notre analyse; la $n^{\text{ième}}$ itérative ayant pour valeur x, la première dérivée de $f^n x - x$, différente de zéro, est d'ordre infini; il y a donc une infinité de secteurs de convergence et de secteurs de divergence infiniment petits, et alternant; on ne peut

donc plus dire que x soit pris dans un secteur de convergence ou dans un secteur de divergence.

A part ce cas, nous arrivons donc, comme dans notre première étude, à trouver, autour du point a et dans un cercle infiniment petit, deux aires de convergence et de divergence de même surface. Il se peut qu'un secteur de divergence fasse partie d'une région de convergence à distance finie, cette région aboutissant finalement à un secteur de convergence; c'est ce qui se passe pour la fonction

$$y = a + \sqrt[p-1]{\frac{C(x-a)^{p-1}}{C+(x-a)^{p-1}}}$$

dont nous nous sommes déjà servi ([1]) et qu'a employée aussi M. Leau, dans sa thèse si intéressante ([2]). Nos résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 16 novembre 1896 et le 31 mai 1897.

[A31] [G6c]

SUR LES EXPRESSIONS DITES SURPUISSANCES;

Par M. D. GRAVÉ, à Saint-Pétersbourg.

Dans le Mémoire intitulé *De formulis exponentialibus replicatis* ([3]), Euler traite le problème suivant :

Soient les relations

$$\omega_1(x) = a^x, \qquad \omega_2(x) = a^{\omega_1(x)} = a^{a^x},$$
$$\omega_3(x) = a^{\omega_2(x)} = a^{a^{a^x}}, \qquad \ldots,$$

([1]) *Un théorème sur les fonctions itératives* (*Bull. de la Soc. math.*, t. XXIII, 1895).

([2]) *Étude sur les équations fonctionnelles*, avril 1897.

([3]) *Acta Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ*, pro anno MDCCLXXVII. Pars prior, page 38.

où $a > 0$; nous aurons

$$\omega_n(x) = a^{\omega_{n-1}(x)}.$$

Il faut trouver la fonction limite $\Omega(x)$ vers laquelle tend $\omega_n(x)$ avec l'accroissement du nombre entier n.

Ce problème se trouve complètement résolu dans le Mémoire cité d'Euler. Comme l'auteur ne démontre pas sa solution, j'ai pour but d'exposer ici les résultats d'Euler avec les démonstrations nécessaires.

Dans tout ce qui suit, au lieu de $\omega_k(x)$, écrivons tout simplement x_n. En nous bornant aux valeurs réelles de x, nous pouvons évidemment supposer x positif, car, si l'on avait $x < 0$, on pourrait, au lieu de x, prendre $x_1 = a^x$.

Montrons d'abord que si $a > e^{\frac{1}{e}} = 1,44466\ldots$, on aura, pour $n = \infty$,

$$\lim \{x_n\} = \infty.$$

En effet, d'après des considérations bien connues,

$$\frac{\log x}{x} \leqq \frac{1}{e},$$

d'où, pour le cas considéré,

$$\frac{\log x}{x} < \log a,$$

ou

$$x < a^x,$$

c'est-à-dire

$$x < x_1.$$

Ainsi nous voyons que l'on a

$$x < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Démontrons que toutes les différences

$$x_{k+1} - x_k = a^{x_k} - x_k$$

sont plus grandes qu'un certain nombre positif.

En considérant la fonction $\varphi(x) = a^x - x$, formons sa dérivée $\varphi'(x) = a^x \log a - 1$. Nous voyons que, si $a > e$, la dérivée est positive et la fonction $\varphi(x)$ a sa moindre valeur pour $x = 0$; mais on a

$$\varphi(0) = 1,$$

d'où il suit que $\varphi(x) > 1$.

Si $e^{\frac{1}{e}} < a < e$, la dérivée s'annule pour

$$x = -\frac{\log \log a}{\log a}$$

et nous obtenons

$$a^x - x > \frac{1 + \log \log a}{\log a}.$$

En désignant par α le nombre positif $\frac{1 + \log \log a}{\log a}$, nous aurons

$$\varphi(x) > \alpha,$$

c'est-à-dire que toutes les différences $x_{k+1} - x_k$ sont plus grandes que α. Ainsi nous voyons que x_n croît sans limites avec le nombre n.

Prenons à présent le cas suivant $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. L'équation $a^x = x$ a dans ce cas deux racines réelles, une entre 1 et e et l'autre entre e et ∞. Désignons la première racine par λ et l'autre par μ.

La fonction $x_1 - x = a^x - x = \varphi(x)$ pour $x = 0$ et pour $x = \infty$ est positive; il ne reste qu'à étudier ses valeurs pour toutes les valeurs positives de x. Formons la dérivée $\varphi'(x) = a^x \log a - 1$, et désignons sa racine positive par x_0; nous obtenons évidemment

$$a^{x_0} = \frac{1}{\log a}.$$

Comme $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, on a

$$0 < \log a < \frac{1}{e},$$

d'où

$$\frac{1}{\log a} > e;$$

on aura

$$a^{x_0} > e,$$

ou

$$x_0 \log a > 1.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ décroît dans l'intervalle de o jusqu'à x_0, atteint sa valeur minimum pour x_0 et commence à croître pour tous les $x > x_0$.

En substituant x_0 dans l'expression pour la fonction $\varphi(x)$, nous obtiendrons

$$\varphi(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\log a} - x_0 = \frac{1 - x_0 \log a}{\log a} < 0;$$

par conséquent l'équation $\varphi(x) = 0$ a deux racines simples, une entre o et x_0 et l'autre entre x_0 et ∞.

Il est facile de voir que les racines réelles de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont séparées par le nombre e. En effet, en substituant e à x, nous obtenons

$$\varphi(e) = a^e - e < \left[e^{\frac{1}{e}} \right]^e - e = 0.$$

Considérons trois intervalles de o à λ, de λ à μ et de μ à ∞.

La fonction $\varphi(x)$ est positive dans le premier et le troisième intervalle et négative dans le second. Par conséquent, si nous prenons la valeur initiale x dans le premier ou le troisième intervalle, les valeurs consécutives x_k croissent avec k. Au contraire, si la valeur de x se trouve dans le second intervalle, les nombres x_k décroissent.

En posant $x = \mu + \delta$, où $\delta > 0$, nous aurons

$$a^{\mu+\delta} - \mu - \delta = (a^{\delta} - 1)\mu - \delta < \delta(\log\mu - 1).$$

Ainsi nous voyons que $x_{k+1} - x_k > \delta(\log\mu - 1)$, de sorte que, quelque petit que soit δ pour $x > \mu$, on aura

$$\lim\{x_n\}_{n=\infty} = \infty.$$

Comme $a > 1$, il s'ensuit que

$$a^x < a^\xi$$

si $x < \xi$. En prenant, au lieu de ξ, la racine λ, on aura, pour $x < \lambda$,

$$a^x < a^\lambda,$$

c'est-à-dire

$$x_1 < \lambda_1.$$

Ainsi nous remarquons que $x_n < \lambda$; mais comme, pour $x < \lambda$, on a

$$x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 > x,$$

nous voyons que x_n, avec l'augmentation de n, tend vers une limite qui ne surpasse pas λ; mais comme cette limite doit être égale à l'une des racines de l'équation $a^x = x$, par conséquent cette limite doit être égale à λ, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\lim\{x_n\}_{n=\infty} = \lambda.$$

De la même façon, nous démontrerons que, si x se trouve entre λ et μ, on aura

$$x > x_1 > x_2 > \ldots > x > \ldots > \lambda,$$

et, par conséquent,

$$\lim\{x_n\}_{n=\infty} = \lambda.$$

Si $x = \mu$, on aura

$$x = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \mu.$$

et, par suite,

$$\lim\{x_n\}_{n=\infty} = \mu.$$

Le cas limite $a = e^{\frac{1}{e}}$ donne

pour $x \leq e$,
$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = e$$
pour $x > e$.
$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \infty$$

Passons à présent au cas $a < 1$.

En considérant la fonction $\varphi(x)$, nous remarquons que la dérivée de cette fonction pour $a < 1$ est constamment négative; par conséquent la fonction est décroissante; elle est positive pour $x = 0$ et négative pour $x = 1$, donc elle a une racine réelle comprise entre 0 et 1.

Nous désignerons cette racine par λ.

Considérons à présent l'équation

$$a^{a^x} = x. \tag{1}$$

Cette équation n'a pas évidemment de racines réelles quand $a > e^{\frac{1}{e}}$; pour $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ les deux racines λ et μ de l'équation $a^x = x$ sont les seules racines de l'équation (1).

En restant toujours dans le cas $a < 1$, et en posant $a = \frac{1}{b}$, nous obtiendrons $b > 1$.

Prenons la fonction $\psi(x) = a^{a^x} - x$.

En posant $y = a^x$, nous pouvons écrire la dérivée $\psi'(x)$ sous la forme

$$\psi'(x) = a^y y \log^2 a - 1 = b^{-y} y \log^2 b - 1.$$

La seconde dérivée sera

$$\psi''(x) = \log^3 a a^y y (1 + \log a y) = -\log^3 b b^{-y} y (1 - \log b y).$$

Si l'on suppose $b < e$, on aura

$$1 - \log b b^{-x} > 0.$$

et nous obtiendrons

$$\psi''(x) < 0;$$

par conséquent, la première dérivée $\psi'(x)$ est une fonction décroissante. Mais on a

$$\psi'(0) = \frac{\log^2 b}{b} - 1 < 0,$$

d'où

$$\psi'(x) < 0.$$

La fonction $\psi(x)$ décroit et, comme on a

$$\psi(0) = a > 0, \qquad \psi(1) = a^a - 1 < 0,$$

elle devient nulle pour la racine λ de l'équation $a^x = x$.

Pour le cas $b > e$, l'équation $\psi''(x) = 0$ admet une racine réelle entre 0 et 1; cette racine est égale à

$$x_0 = \frac{\log \log b}{\log b}.$$

Pour $0 \leq x < x_0$, on a

$$\psi''(x) > 0;$$

mais, pour $x_0 < x \leq 1$, on a

$$\psi''(x) < 0.$$

Dans le premier intervalle la fonction $\psi'(x)$ croît en partant de la valeur $\frac{\log^2 b}{b} - 1$ qui est négative pour toutes les valeurs de b et atteint la valeur maximum pour $x = x_0$. Après cette valeur la fonction commence à décroître.

Si $\psi'(x_0) < 0$, la fonction $\psi'(x)$ sera négative pour toutes les valeurs de x, et par conséquent la fonction $\psi(x)$ a la racine unique λ qui sera en même temps celle de l'équation $a^x = x$.

Si l'on a $\psi'(x_0) > 0$, il n'est pas difficile de se con-

vaincre que l'équation $\psi(x) = 0$, outre la racine de l'équation $a^x = x$, en admet deux autres. Mais, comme on a

$$\psi'(x_0) = \frac{1}{e}\log b - 1,$$

démontrons que si $\log b > e$, l'équation $\psi(x) = 0$ aura deux racines réelles comprises entre 0 et 1, distinctes de λ.

Dans ce cas

$$b > e^e, \qquad a < \frac{1}{e^e} = 0,06598\ldots.$$

La fonction $\psi(x)$ a évidemment une racine λ qui appartient à l'équation $a^x = x$. Substituons cette racine dans l'expression de la première dérivée; on aura la relation

$$\psi'(\lambda) = \lambda^2 \log^2 b - 1 = \log^2 \lambda - 1 \gtrless 0,$$

où $\psi'(\lambda)$ devient nulle pour $b = e^e$, $\lambda = \frac{1}{e}$, et $\psi'(\lambda)$ est positive pour $b > e^e$.

Par conséquent, il vient, pour ε infiniment petit positif,

$$\psi(\lambda - \varepsilon) < 0, \qquad \psi(\lambda + \varepsilon) > 0.$$

Mais, en tenant compte des inégalités

$$\psi(0) > 0, \qquad \psi(1) < 0,$$

nous arrivons à ce résultat que l'équation $\psi(x) = 0$ a deux autres racines réelles, une entre 0 et λ et l'autre entre λ et 1. En désignant la première racine par λ_1 et la seconde par λ_2, nous aurons

$$\lambda_2 > \lambda_1, \qquad \lambda_2 = a^{\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = a^{\lambda_2}.$$

Ainsi nous voyons que, pour le cas $\frac{1}{e^e} < a < 1$, on

aura

$$a^{x_k} \gtrless a^\lambda,$$

si $x_k \gtrless \lambda$; mais $a^{x_k} = x_{k+1}$ et $a^\lambda = \lambda$, d'où

$$x_{k+1} \lessgtr \lambda.$$

Quand $x < \lambda$, on aura évidemment

$$\begin{array}{lllll} x < \lambda, & x_2 < \lambda, & x_4 < \lambda, & \ldots, & x_{2n} < \lambda, \\ & x_1 > \lambda, & x_3 > \lambda, & \ldots, & x_{2n+1} > \lambda. \end{array}$$

Comme la fonction $\psi(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$, on aura les inégalités

$$\begin{aligned} x_{2k+2} - x_{2k} &= \psi(x_{2k}) > 0, \\ x_{2k+1} - x_{2k-1} &= \psi(x_{2k-1}) < 0, \end{aligned}$$

et nous remarquons que les expressions avec indices pairs croissent en restant toujours plus petites que λ; par conséquent elles tendent vers une limite. De même façon, les expressions avec indices impairs décroissent en restant plus grandes que λ et tendent vers une limite fixe. Il est évident que ces expressions ne peuvent pas avoir une autre limite que la racine de la fonction $\psi(x)$ et, par conséquent,

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda.$$

Pour $x > \lambda$, les raisonnements sont les mêmes. Les expressions avec les indices pairs s'approchent de la limite λ en décroissant.

Prenons le dernier cas $a < \frac{1}{e^e}$.

Considérons quatre intervalles

$$\text{I}(0, \lambda_1), \quad \text{II}(\lambda_1, \lambda), \quad \text{III}(\lambda, \lambda_2), \quad \text{IV}(\lambda_2, +\infty).$$

Les signes des fonctions φ et ψ pour ces intervalles

composent la Table suivante :

	I.	II.	III.	IV.	
$\varphi(x)$	+	+	—	—	
$\psi(x)$	+	—	+	—	

La Table des signes de la fonction montre que la racine λ se trouve toujours entre deux nombres consécutifs de notre série

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

Nous allons établir que les nombres avec des indices pairs ou infinis doivent se trouver dans un même intervalle. En effet, si x se trouve dans le premier intervalle, x_1 doit être dans le quatrième, et *vice versa*.

Cela peut être démontré de la manière suivante : Si $x < \lambda_1$, nous aurons

$$a^x > a^{\lambda_1},$$

ou, en d'autres termes,

$$x_1 > \lambda_2,$$

et *vice versa ;* si $x > \lambda_2$, on aura

$$x_1 < \lambda_1.$$

Nous remarquons que toutes les valeurs x_{2k} à indices pairs seront comprises dans un même intervalle, et toutes les autres x_{2k+1} dans un autre.

Si x se trouve dans le second intervalle, toutes les valeurs x_{2k} seront dans le même intervalle, mais tous les nombres à indices impairs seront dans le troisième intervalle, et *vice versa.*

En effet, si

$$\lambda_1 < x < \lambda_2$$

on aura

$$a^{\lambda_1} > a^x > a^\lambda$$

ou

$$\lambda_2 > x_1 > \lambda.$$

De même façon, si

$$\lambda < x < \lambda_2,$$

on aura

$$a^\lambda > a^x > a^{\lambda_2}$$

ou

$$\lambda > x_1 > \lambda_1.$$

De tout ce qui précède nous pouvons conclure que, si x se trouve dans les deux premiers intervalles I, II, on aura

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lambda_1, \qquad \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda_2.$$

Pour les intervalles III, IV, où $x > \lambda$, on a

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lambda_2, \qquad \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda_1.$$

On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème que voici :

Théorème. — *La fonction limite $\Omega(x)$ se détermine de la manière suivante :*

1. $a > e^{\frac{1}{e}}$.

$\Omega(x) = \infty$ pour toutes les valeurs réelles de x.

2. $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$,

$\Omega(x) = \lambda$	pour	$-\infty < x < \mu$,
$\Omega(\mu) = \mu$	»	$x = \mu$,
$\Omega(x) = \infty$	»	$\mu < x < +\infty$.

3. $\frac{1}{e^e} < a < 1$,

$$\Omega(x) = \lambda.$$

4. $0 < a < \frac{1}{e^e}$; en écrivant

$$\Omega_1(x) = \lim \{x_{2n}\}_{n=\infty}, \qquad \Omega_2(x) = \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty};$$

$$\begin{array}{llll} \Omega_1(x) = \lambda_1, & \Omega_2(x) = \lambda_2 & \text{pour} & -\infty < x < \lambda, \\ \Omega_1(\lambda) = & \Omega_2(\lambda) = \lambda & \text{»} & x = \lambda, \\ \Omega_1(x) = \lambda_2, & \Omega_2(x) = \lambda_1 & \text{»} & \lambda < x < +\infty. \end{array}$$

Il n'est pas difficile de trouver la proposition concernant les opérations inverses.

Désignons par $\text{Log}_a x$ le logarithme du nombre x pris dans le système ayant pour base a.

Considérons la série des nombres

$$x_1 = \text{Log}_a x, \qquad x_2 = \text{Log}_a x_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = \text{Log}_a x_{n-1}.$$

Si, dans le calcul des nombres consécutifs, nous parvenons à un nombre négatif x_k, le nombre suivant $x_{k+1} = \text{Log}_a x_k$ sera évidemment imaginaire.

Désignons par $\psi(x)$ la limite vers laquelle tend

$$\text{Log}_a \text{Log}_a \ldots \text{Log}_a \text{Log}_a x,$$

avec augmentation indéfinie du nombre d'opérations consécutives.

Considérons le cas $1 \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$.

Cette limite $\psi(x)$ est égale à μ pour $\lambda < x < +\infty$; elle est égale à λ pour $x = \lambda$.

Pour le cas $0 < a < \frac{1}{e}$, on aura

$$\psi(x) = \lambda \qquad \text{pour} \qquad \lambda_1 < x < \lambda_2.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. G. Fontené.

.... A propos de la Règle des analogies de M. Lemoine, dont il est question dans le numéro de janvier, je dirai ceci : Dans un petit Livre, *Géométrie dirigée*, édité par la librairie Nony, je désigne par α, β, γ les droites dirigées qui portent les côtés d'un triangle dans un plan orienté, et je pose

$$\left\{\begin{array}{ll} a = \overline{BC}, & A = (\beta, \gamma) + 2k\pi; \\ b = \overline{CA}, & B = (\gamma, \alpha) + 2k\pi; \\ c = \overline{AB}, & C = (\alpha, \beta) + 2k\pi; \end{array}\right.$$

ayant défini le *signe de la distance* d'un point à une droite dirigée, dans un plan orienté, j'appelle h, h', h'' les distances des points A, B, C aux droites α, β, γ ; je désigne par r le rayon algébrique du *cycle* tangent aux trois côtés, c'est-à-dire la distance du centre à une tangente dirigée, etc. Il résulte de l'ensemble du Livre que toutes les formules de la Géométrie acceptent l'emploi des signes et qu'une même formule contient plusieurs formules *absolues,* selon la manière dont on dirige les côtés du triangle. Le plan étant orienté dans le sens ABC par exemple, on pourra diriger les côtés du triangle de B vers C, de C vers A, de A vers B, ou diriger le premier de C vers B, les deux autres restant dirigés comme ci-dessus ; en désignant par a', b', c' les valeurs absolues des côtés, et par A', B', C' les valeurs absolues des angles *intérieurs* du triangle, on aura, selon les cas,

$$\left\{\begin{array}{ll} a = a', & A = \pi - A', \\ b = b', & B = \pi - B', \\ c = c', & C = \pi - C', \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll} a = - a', & A = \pi - A', \\ b = b', & B = - B', \\ c = c', & C = - C', \end{array}\right.$$

résultat conforme à ce qui est dit à la page 35.

Dans les deux cas, en appelant r le rayon du cycle inscrit, en posant $a + b + c = 2p$, on aura $s = pr$; de même, on a

toujours $r = (p - a) \cot \frac{A}{2}$; chacune de ces formules en contient deux. Il faut d'ailleurs observer que, une fois les formules fondamentales établies, on n'a pas à examiner les différents cas de figure pour démontrer un théorème général.

.... J'ai appris, par l'énoncé qu'a donné la Rédaction, que la question 1749 était connue pour le quadrilatère. La démonstration donnée page 51 est terminée à la douzième ligne, car le fait que le centre de gravité du solide est au quart de GO' s'établit aisément du premier coup pour un assemblage de deux pyramides : le raisonnement analogue est classique pour un quadrilatère décomposé en deux triangles.

BIBLIOGRAPHIE.

Œuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. *C. Hermite, H. Poincaré* et *E. Rouché*, Membres de l'Institut. 2 vol. gr. in-8°. T. I : Algèbre, Calcul intégral ; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Extrait de la Préface. — Les beaux travaux de Laguerre lui avaient attiré l'estime et bientôt l'admiration des juges les plus compétents. Il a paru utile de réunir, dans un ensemble complet, les Mémoires si remarqués qu'il a publiés pendant sa vie. Cette réunion d'articles séparés formera deux Volumes, dont nous présentons le premier au public.

C'est grâce au bienveillant appui de l'Académie des Sciences que cette Œuvre a pu être entreprise ; le monde savant lui en sera profondément reconnaissant.

Dans ce premier Volume, on trouve un grand nombre d'articles sur les équations numériques et sur les équations algébriques, sur l'évaluation des fonctions et sur les équations différentielles. A la fin, figure une Note de M. Hermite, sur un Mémoire de Laguerre, concernant les équations algébriques.

Plusieurs des travaux de Laguerre que contient ce Volume avaient primitivement été publiés dans les *Nouvelles Annales*.

dont l'éminent Géomètre fut un des plus fidèles et des plus brillants collaborateurs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1384.

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION,

Par M. A. DROZ-FARNY.

Dans les *Nouvelles Annales* de 1896, page 388, M. H. Brocard a publié une très intéressante solution de la question 1384, proposée par M. Mannheim :

D'un point pris sur une hyperbole équilatère, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels.

Dans cette Note, je me propose de donner de ce théorème une démonstration purement géométrique et de prouver que le théorème reste valable pour une hyperbole quelconque.

Soit ABC un triangle inscrit dans une hyperbole H, dont les points à l'infini sont Q et R. D'un point P pris quelconque sur H on mène les parallèles PQ et PR aux asymptotes. En vertu d'une proposition bien connue, les deux triangles PQR et ABC, inscrits dans H, sont circonscrits à une conique qui sera évidemment une parabole, puisqu'elle admet comme tangente la droite à l'infini QR.

Mais on sait que trois tangentes fixes à une parabole déterminent sur toute tangente variable des segments proportionnels à des quantités constantes.

D'où la proposition généralisée de M. Mannheim.

Question 1529.

1885, p. 152.

Trois droites, issues de trois sommets d'un triangle, déterminent sur les côtés opposés six segments, tels que la

différence entre le produit de trois segments non consécutifs et le produit des trois autres est

$$\frac{abc}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 lmn;$$

A, a, b, c désignent l'aire et les côtés du triangle donné; A', a', b', c' l'aire et les côtés du triangle formé par les trois droites; l, m, n les segments de ces trois droites compris entre les sommets et les côtés du premier triangle.

CESÀRO.

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION,

Par M. FRANCESCO FERRARI.

I. Soient :

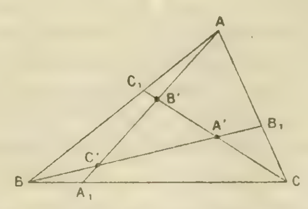
1. A_1, B_1, C_1 points situés respectivement sur les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ du triangle $ABC = A$;
2. A', B', C' les points d'intersection des couples de droites (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1);
3. a', b', c' respectivement les côtés $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ du triangle $A'B'C' = A'$;
4. $AA_1 = l$, $BB_1 = m$, $CC_1 = n$;
5. $\frac{BA_1}{A_1C} = h$, $\frac{CB_1}{B_1A} = p$, $\frac{AC_1}{C_1B} = q$,

d'où

$$(1)\qquad \frac{BC}{BA_1} = \frac{h+1}{h}, \qquad \ldots, \qquad \frac{BC}{A_1C} = h+1, \qquad \ldots;$$

6. $1 + h + hp = \mu_1$, $1 + p + pq = \mu_2$, $1 + q + qh = \mu_3$.

Fig. 1.



Les triangles AA_1C, AA_1B (*fig.* 1), coupés respectivement par les droites BB_1, CC_1, donnent

$$\frac{AC_1}{C_1A'}\,\frac{A_1B}{BC}\,\frac{CB_1}{B_1A} = 1, \qquad \frac{AB'}{B'A_1}\,\frac{A_1C}{CB}\,\frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

d'où, en vertu de (1),

$$\frac{AC'}{C'A_1} = \frac{h+1}{hp}, \qquad \frac{AB'}{B'A_1} = q(h+1),$$

et de là

$$\frac{AC'}{AA_1} = \frac{h+1}{\mu_1}, \qquad \frac{AB'}{AA_1} = \frac{q(h+1)}{\mu_3},$$

d'où

$$\frac{a'}{l} = \frac{AC' - AB'}{AA_1} = \frac{(1-hpq)(1+h)}{\mu_3\mu_1}.$$

Par analogie,

$$\frac{b'}{m} = \frac{(1-hpq)(1+p)}{\mu_1\mu_2}, \qquad \frac{c'}{n} = \frac{(1+hpq)(1+q)}{\mu_2\mu_3}.$$

En multipliant

$$(2) \qquad \frac{a'b'c'}{lmn} = \frac{(1-hpq)^3(1+h)(1+p)(1+q)}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

L'aire du triangle A'B'C' circonscrit à ABC est

$$(3) \qquad \frac{A'}{A} = \frac{(1-hpq)^2}{\mu_1\mu_2\mu_3};$$

donc on a

$$\frac{lmn}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 = \frac{1-hpq}{(1+h)(1+p)(1+q)},$$

d'où, par (1),

$$A_1C.B_1A.C_1B - BA_1.CB_1.AC_1 = abc\,\frac{lmn}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2.$$

II. Soient :

1. ABCD un tétraèdre;
2. A_1, B_1, C_1, D_1 points situés sur les côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ du quadrangle gauche ABCD;
3. A', B', C', D' respectivement les points d'intersection des trois plans (CDA_1, DAB_1, ABC_1), (DAB_1, ABC_1, BCD_1), (ABC_1, BCD_1, CDA_1), (BCD_1, CDA_1, DAB_1);
4. α', β', γ', α_1, β_1, γ_1 l'aire des triangles A'B'C', B'C'D', C'D'A', D'A'B', ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1;
5. A, A' les volumes des tétraèdres ABCD, A'B'C'D';
6. $\frac{AA_1}{A_1B} = h$, $\frac{BB_1}{B_1C} = p$, $\frac{CC_1}{C_1D} = q$, $\frac{DD_1}{D_1A} = r$.

d'où

$$(4)\quad \frac{AB}{AA_1} = \frac{h+1}{h}, \qquad \ldots, \qquad \frac{AB}{A_1B} = h+1, \qquad \ldots;$$

7. $1 + h + hp + hpq = \mu_1, \qquad 1 + p + pq + dqr = \mu_2,$
$1 + q + qr + qrh = \mu_3, \qquad 1 + r + rh + rhp = \mu_4;$

8. N le point d'intersection des droites BC_1, DB_1, et S celui des droites AC_1, CD_1.

Fig. 2.

Des triangles BCC_1, DAC_1 (*fig.* 2), coupés respectivement par les droites DB_1, CD_1, on a

$$\frac{BN}{NC_1}\,\frac{C_1D}{DC}\,\frac{CB_1}{B_1B} = -1, \qquad \frac{C_1S}{SA}\,\frac{AD_1}{D_1D}\,\frac{DC}{CC_1} = -1,$$

d'où, en vertu de (4),

$$(5)\qquad \frac{BN}{NC_1} = p(q+1), \qquad \frac{C_1S}{SA} = \frac{rq}{q+1}.$$

Or le triangle $A'B'C'$ est circonscrit au triangle ABC_1, et ses côtés $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ rencontrent les côtés BC_1, C_1A, AB de ABC_1 respectivement aux points N, S, A_1, et de là, en appliquant la formule (3) et ayant égard aux valeurs (5), on trouve

$$\frac{\alpha'}{\alpha_1} = \frac{(1-hpqr)^2(q+1)}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

Par analogie,

$$\frac{\beta'}{\beta_1} = \frac{(1-hpqr)^2(r+1)}{\mu_2\mu_3\mu_4}, \qquad \frac{\gamma'}{\gamma_1} = \frac{(1-hpqr)^2(h+1)}{\mu_3\mu_4\mu_1},$$

$$\frac{\delta'}{\delta_1} = \frac{(1-hpqr)^2(p+1)}{\mu_4\mu_1\mu_2}.$$

En multipliant

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1} = \frac{(1-hpqr)^8(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}{\mu_1^3\mu_2^3\mu_3^3\mu_4^3},$$

le volume du tétraèdre A'B'C'D', dont les faces passent par les côtés AB, BC, CD, DA du quadrangle ABCD et rencontrent respectivement les côtés opposés en C_1, D_1, A_1, B_1 est

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}} = \frac{(1-hpqr)^3}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}.$$

Donc on a

$$\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\left(\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\right)^3 = \frac{1-hpqr}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)},$$

d'où, en vertu de (4),

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1\mathrm{B}.\mathrm{B}_1\mathrm{C}.\mathrm{C}_1\mathrm{D}.\mathrm{D}_1\mathrm{A} - \mathrm{AA}_1.\mathrm{BB}_1.\mathrm{CC}_1.\mathrm{DD}_1 \\ = abcd\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\left(\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\right)^3.\end{aligned}$$

Remarque. — Les formules (3), (6) se déduisent aisément des formules de l'aire du triangle et du volume du tétraèdre en coordonnées segmentaires ou en coordonnées barycentriques.

QUESTIONS.

62 [1] (**1843**, p. 96). Soit un nombre quelconque m de points donnés et n un nombre entier moindre que $m-1$; on peut déterminer $n+1$ points tels que si, des points donnés et des points trouvés, on mène des lignes droites à un autre point quelconque, la somme des puissances $2n$ des lignes menées des m points donnés soit à la somme des puissances $2n$ des lignes menées des autres points, comme m est à $n+1$.

(Ce théorème a été donné sans démonstration par Mathews

(1) Nous commençons dans ce numéro la réimpression des questions restées jusqu'ici sans solution et nous la continuerons progressivement dans la limite où nous le permettront les nécessités de la mise en pages.

Stewart dans l'Ouvrage intitulé : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics*. On trouve dans cet Ouvrage plusieurs autres théorèmes du même genre et qui n'ont pas été démontrés.)

126 (**1846**, p. 448). Est-il possible de démontrer que $2^{\sqrt{2}}$ est une quantité irrationnelle?

187 (**1848**, p. 240). Deux côtés d'un angle droit touchent deux coniques confocales ([1]) situées dans le même plan : le lieu du sommet est un cercle ; la droite qui réunit les deux points de contact a pour enveloppe une conique.

(CHASLES).

193 (**1848**, p. 368). Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété, que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés d'un angle trièdre trirectangle est constant.

1786. A, B, C, D étant quatre quantités imaginaires données et X une quantité imaginaire variable, on forme le déterminant

$$\begin{vmatrix} A-X & B-X \\ C-X & D-X \end{vmatrix} = \Delta.$$

Démontrer :

1° Que si le module de Δ reste constant, le point X, extrémité de x, parcourt une circonférence;

2° Que si l'argument de Δ reste constant, le point X parcourt une droite.

Trouver le centre de cette circonférence et la direction de cette droite lorsque l'argument de Δ est nul. (LAISANT.)

RECTIFICATION.

La question 1298, comprise dans la liste de celles qui sont restées sans solution (1897, p. 580), a été résolue par M. CH. HENRY (1881, p. 418). C'est à M. Fauquembergue que nous sommes redevable de cette rectification, et nous lui en exprimons nos remercîments.

([1]) Il faut entendre ici par *confocales* deux coniques ayant les mêmes foyers; on les appelle aujourd'hui plus habituellement *homofocales*, en réservant le premier mot aux coniques ayant *un seul* foyer commun.

NÉCROLOGIE.

M. GAUTHIER-VILLARS.

Au moment où ce numéro des *Nouvelles Annales* allait être mis sous presse, nous avons appris la mort de M. Jean-Albert GAUTHIER-VILLARS père, décédé le 5 février, à l'âge de 69 ans.

Nous ne pouvons songer même à esquisser ici la vie de cet homme de bien, d'un grand cœur et d'une haute intelligence. Mais nous avons le devoir de payer à sa mémoire le tribut qu'elle mérite, et d'adresser à sa famille nos condoléances les moins banales et les plus profondément sympathiques.

Tous ceux qui l'ont personnellement connu partageront les sentiments que nous exprimons ici.

Tous ceux qui s'intéressent aux développements et aux progrès de la Science comprendront quelle perte nous venons de faire, car ils savent quelle aide puissante il a donnée à la Science française.

Les *Nouvelles Annales*, en particulier, lui doivent un hommage spécial, et c'est avec un grand serrement de cœur que nous l'apportons sur sa tombe.

Les Rédacteurs.

[M¹2e]

SUR UN QUADRANGLE MOBILE;

Par M. G. FONTENÉ,

Professeur au Collège Rollin.

1. Étant données deux droites Ox, Oy et une conique Σ, la correspondance établie entre un point A de Ox et un point B de Oy, par la condition que la droite AB soit tangente à la conique Σ, est une correspondance doublement quadratique, telle que, si l'un des points A et B est en O, les deux positions de l'autre point sont confondues en O : cela forme trois conditions et la correspondance dépend de cinq paramètres, comme la conique. Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, l'équation tangentielle de la conique est

$$\frac{A}{a^2} + \frac{B}{ab} + \frac{C}{b^2} + \frac{D}{a} + \frac{E}{b} + F = 0,$$

d'où résulte la relation doublement quadratique

$$F a^2 b^2 + E a^2 b + D a b^2 + C a^2 + B ab + A a^2 = 0,$$

sans terme indépendant, sans terme du premier degré. La réciproque est exacte.

On a un fait corrélatif, dont la réciproque s'énonce ainsi :

Étant donnés deux points O *et* O′ *sur une droite* ω, *si les droites a et b issues de ces deux points ont une correspondance doublement quadratique, telle que, quand l'une des droites a et b prend la position ω, les deux positions de l'autre droite se confondent en ω, le lieu du point d'intersection des droites a et b est une conique* S.

2. Soit un quadrilatère complet (le lecteur est prié de faire la figure) dont les trois couples de sommets sont $O_1\Omega_1$, $O_2\Omega_2$, $O_3\Omega_3$, les sommets O_1, O_2, O_3 étant en ligne droite : considérons deux coniques S_1, S_2 (deux cercles par exemple) respectivement conjuguées par rapport aux triangles $\Omega_1 O_2 O_3$, $\Omega_2 O_1 O_3$, et envisageons successivement les deux divisions de points $O_3 O_2 O_1$, $O_3 \Omega_1 \Omega_2$. Relativement à la première, les côtés a, b, c d'un triangle mobile ABC passent par les trois points fixes O_1, O_2, O_3, les sommets A et B décrivent les coniques S_1 et S_2, et l'on cherche le lieu du sommet C. Rappelons d'abord que, quand une conique S_1 est conjuguée par rapport à un triangle $\Omega_1 O_2 O_3$, un point A de cette conique donne lieu à un quadrangle inscrit $A A_1 A_2 A_3$, dont les couples de côtés opposés se croisent aux trois sommets du triangle conjugué. Cela posé, si l'on mène par le sommet O_2 du triangle $\Omega_1 O_2 O_3$ les droites b et b' conjuguées par rapport aux côtés issus de O_2, elles coupent S_1 aux quatre points AA_2, $A_3 A_1$, la lettre A se rapportant à S_1, l'indcie de AA_2 se rapportant à O_2, et les deux droites AA_3, $A_1 A_2$, ou c et c', passent en O_3 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle issus de O_3 ; comme la conique S_2 est conjuguée par rapport au triangle $\Omega_2 O_1 O_3$, dont les côtés issus de O_3 sont portés par les mêmes droites que ceux du premier triangle, les droites c et c' coupent cette conique S_2 aux quatre points BB_3, $B_1 B_2$, tels que les deux droites BB_1, $B_2 B_3$, ou a et a', passent en O_1 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle issus de O_1 ; il existe donc entre les droites a et b une correspondance doublement quadratique, laquelle satisfait aux conditions du n° 1, et le point C d'intersection des droites a et b décrit une conique S_3 ; d'ailleurs, si l'on considère le triangle $\Omega_3 O_1 O_2$, les droites a, a' et les

droites b, b' sont respectivement conjuguées par rapport aux côtés de ce triangle issus de O_1 et de O_2, et la conique S_3, qui passe par les points d'intersection C, C_1, C_2, C_3 des droites a, a' avec les droites b, b', est conjuguée par rapport à ce triangle. Il est facile de voir que cette conique passe par les points communs aux coniques S_1 et S_2, les trois points A, B, C pouvant être confondus avec l'un de ces points. Les notations sont résumées dans le Tableau :

a,	a'	b,	b'	c,	c'
BB_1,	B_2B_3	CC_2,	C_3C_1	AA_3,	A_1A_2
CC_1,	C_2C_3	AA_2,	A_3A_1	BB_3,	B_1B_2.

qui permet en même temps de suivre la démonstration en le lisant à partir de AA_2, A_3A_1.

On a maintenant trois coniques S_1, S_2, S_3. En conservant d'abord les deux coniques S_1, S_2 et en remplaçant la division de points $O_3O_2O_1$ par la division $O_3\Omega_1\Omega_2$ les côtés α, β, c d'un triangle mobile ABD passent, de même, par les trois points fixes Ω_1, Ω_2, O_3, α étant DA, β étant DB, les sommets A et B décrivent les coniques S_1 et S_2, et le sommet D décrit une conique S, conjuguée par rapport au triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ et passant par les points communs aux coniques S_1, S_2, S_3. D'ailleurs, les droites AA_1, A_2A_3, ou α, α', passent en Ω_1 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1O_2O_3$ issus de Ω_1 ou par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, et de même les droites BB_2, B_3B_1, ou β, β', passent en Ω_2 et sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle $\Omega_2O_1O_3$ issus de Ω_2, ou par rapport aux côtés du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$: les droites α, α' coupent les droites β, β' aux quatre points D, D_1, D_2, D_3, situés sur la conique S. En prenant, d'autre part, les coniques S_1 et S_3, conjuguées par rapport aux triangles $\Omega_1O_3O_2$ et $\Omega_3O_1O_2$, et

en prenant par exemple la division de points $O_2\Omega_1\Omega_3$, on mène par Ω_1 les sécantes α et α' qui coupent la conique S_1 aux points AA_1, A_2A_3, on passe par les droites AA_2, A_1A_3, ou b, b', issues de O_2, qui coupent la conique S_3 aux points CC_2, C_1C_3, et l'on obtient les droites CC_3, C_1C_2, ou γ, γ', passant en Ω_3 : les droites α, α' coupent les droites γ, γ' en quatre points situés sur la conique S, et ces points sont nécessairement les points d'intersection D, D_1, D_2, D_3 de cette conique avec les droites α et α'. On a le Tableau :

α,	α'	β,	β'	γ,	γ'
AA_1,	A_2A_3	BB_2,	B_3B_1	CC_3,	C_1C_2
DD_1.	D_2D_3	DD_2,	D_3D_1	DD_3,	D_1D_2.

On peut alors énoncer ce théorème :

Étant donné un quadrilatère complet, si l'on considère quatre coniques respectivement conjuguées par rapport aux quatre triangles du quadrilatère et formant un faisceau, d'où il résulte que deux d'entre elles peuvent être prises arbitrairement et déterminent complètement les deux autres, un quadrangle mobile ABCD *peut avoir ses sommets situés respectivement sur les quatre coniques, les six côtés a, b, c, α, β, γ passant respectivement par les six sommets du quadrilatère.*

On peut prendre, par exemple, les quatre cercles conjugués par rapport aux quatre triangles du quadrilatère. On a un théorème corrélatif.

La figure fixe dépend de douze paramètres : on peut se donner les deux coniques S_1, S_2 et la droite indéfinie $O_1O_2O_3$, prendre ses pôles Ω_1 et Ω_2 par rapport aux deux coniques, etc. ; le cas singulier où la droite $O_1O_2O_3$ est tangente aux deux coniques a été donné par M. Williamson (*voir* Salmon, *Sections coniques*),

et c'est de là que m'est venue l'idée du théorème général.

Les six côtés a, b, c, α, β, γ du quadrangle mobile ABCD donnent lieu à six droites a', b', c', α', β', γ' respectivement conjuguées des premières par rapport aux côtés des angles O_1, O_2, O_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3 du quadrilatère, et de là résultent quatre quadrangles $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$, ..., respectivement inscrits aux quatre coniques S_1, S_2, S_3, S et non comparables au quadrangle ABCD. Ces quatre quadrangles donnent lieu à deux séries de quatre quadrangles tels que ceux du théorème, et dont les sommets sont indiqués par les lignes et les colonnes du Tableau suivant :

A	B	C	D
D_1	C_1	B_1	A_1
C_2	D_2	A_2	B_2
B_3	A_3	D_3	C_3 ;

la droite a, qui contient les quatre points B, B_1, C, C_1, porte les côtés BB_1 et CC_1 des quadrangles $BB_1B_2B_3$ et $CC_1C_2C_3$ inscrits à S_2 et à S_3 et les côtés BC, B_1C_1, BC_1, B_1C de quatre des huit quadrangles du Tableau ; sa conjuguée a' contient les quatre points B_2, B_3, C_2, C_3, etc. Si l'on se donne D, on obtient les deux quadrangles DABC et $DA_1B_2C_3$.

3. La correspondance établie entre les points A et C des coniques S_1 et S_3, par le fait que la droite AC passe en O_2, est une correspondance doublement quadratique ; il en est de même de la correspondance établie entre les points C et B des coniques S_3 et S_2, par le fait que la droite CB passe en O_1, et il arrive que la correspondance résultante entre les points A et B des coniques S_1 et S_2 se décompose en deux correspondances

doublement quadratiques, dont l'une consiste en ce que la droite AB passe par le point O_3. Cela exige (*Nouvelles Annales*, p. 437; 1897) que les positions du point C qui donnent deux points A confondus donnent aussi deux points B confondus, et il en résulte que les tangentes menées de O_1 à S_2 et de O_2 à S_1 doivent se couper sur S_3.

[O4dα]

SUR L'HYPERBOLOÏDE OSCULATEUR A UNE SURFACE RÉGLÉE LE LONG D'UNE GÉNÉRATRICE;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

Dans le numéro de septembre dernier de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, j'ai, à la suite de réponses fort intéressantes de M. Mannheim et de M. d'Ocagne, indiqué sans démonstration une solution d'un problème proposé par M. Chomé. La construction à laquelle je suis parvenu fournit un moyen de résoudre la question suivante, dont cette Note contiendra le développement :

Construire l'hyperboloïde osculateur à la surface réglée engendrée par une droite abc qui s'appuie sur trois courbes données (a), (b) *et* (c).

Il suffit évidemment de construire la génératrice A de cet hyperboloïde, autre que abc, qui passe, par exemple, par a. Nous remarquerons d'abord que cette génératrice est commune à tous les hyperboloïdes H, osculateurs en a à la courbe (a), et tangents en b et c aux courbes (b) et (c) : car, si l'on prend la droite abc pour axe des z et le plan osculateur en a à (a) pour plan des xy,

l'axe des x étant d'ailleurs la tangente à cette courbe, les hyperboloïdes H ont pour équation générale

$$mx^2 + \lambda y^2 + ayz - bzx + \mu xy + y = 0,$$

équation dans laquelle les paramètres a et b sont déterminés par la connaissance des plans tangents le long de l'axe des z, et le paramètre m, par celle de la courbure de (a). On voit bien que la génératrice A, représentée par les équations

$$y = 0, \qquad mx - bz = 0,$$

ne dépend pas des paramètres variables λ et μ. D'ailleurs, la courbe (a) n'intervenant que par son plan osculateur et sa courbure en a, on peut évidemment la supposer plane.

Ceci posé, considérons le plan P, mené par b parallèlement au plan de la courbe (a) : nous allons chercher sur ce plan la trace α de la génératrice A.

Soient bb' et bt les traces sur ce plan des plans tangents en b et c aux hyperboloïdes H, et soit cc' la parallèle menée de c à bt. Tous les hyperboloïdes H sont tangents en c à cc' et osculateurs en a à la courbe (a). Or on sait que toutes les quadriques qui passent par cinq points coupent un plan quelconque P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une même conique Γ, la droite, joignant deux des cinq points considérés, et le plan déterminé par les trois autres ayant évidemment pour traces sur le plan P un point et une droite qui, par rapport à Γ, sont pôle et polaire. Ici, deux des cinq points à envisager sont confondus en c sur la droite cc', et les trois autres sont confondus en a sur la courbe (a).

Pour déterminer dans le plan P la conique Γ correspondant à ces cinq points, considérons sur la courbe (a)

un point quelconque a'', et désignons par Γ' la conique du plan P qui correspond aux cinq points suivants : deux points c et c' confondus en c sur la droite cc', deux points a et a' confondus en a sur la courbe (a), enfin le point a'' ; cette conique Γ' a pour limite la conique Γ quand le point a'' se rapproche infiniment du point a. Or, désignons par r la trace de la droite ca'' sur le plan P : elle se trouve sur la courbe (r), suivant laquelle la courbe (a), vue du point c, se projette sur le plan P, et la tangente en b à cette courbe est évidemment la droite $b\alpha$. Par rapport à la conique Γ les traces des droites cc', ca et ca'' ont respectivement pour polaires les traces des plans $aa'a''$, $c'a'a''$ et $c'aa'$; autrement dit :

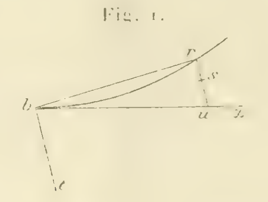
1° Γ' est une parabole d'axe parallèle à bt ;

2° Elle est tangente en b à br ;

3° La polaire du point r par rapport à Γ' est la droite $b\alpha$.

Soit u le point où $b\alpha$ coupe la parallèle ru à bt, et

Fig. 1.



soit s le milieu du segment ru. Ce point étant évidemment sur la parabole Γ', on en déduit immédiatement que si r se rapproche indéfiniment de b sur la courbe (r) la limite Γ de la parabole Γ' a en b une courbure opposée à celle de la courbe (r), et moitié moindre. D'après une propriété connue du centre de courbure de la parabole, la directrice de Γ passe donc par le centre de courbure p de la courbe (r) en b, c'est-à-dire par la trace sur le plan P de la droite $c\omega$, ω désignant le centre de courbure en a de la courbe (a).

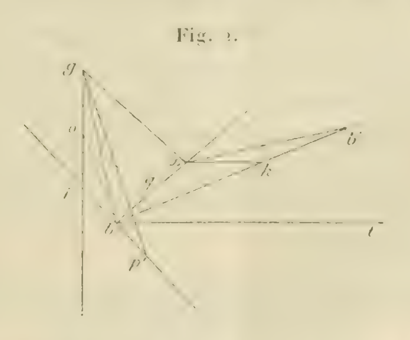
Nous avons donc obtenu une parabole Γ à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques suivant lesquelles le plan P coupe les hyperboloïdes H : ces coniques sont d'ailleurs tangentes en b à la droite bb', qu'elles coupent, par conséquent, en des points conjugués par rapport à Γ : elles passent, par suite, par le pôle de cette droite, qui, situé sur la droite $b\alpha$, n'est donc autre que le point α lui-même.

La construction de ce point est donc ramenée au problème suivant :

Construire le pôle α de la droite bb' par rapport à la parabole Γ, *tangente en b à $b\alpha$, dont l'axe a pour direction bt, et dont la directrice passe par le point p de la normale bp en b.*

Soient b' l'intersection de bb' avec Γ, K le milieu de bb', q le point de concours des perpendiculaires bq et αq aux droites $\alpha b'$ et $b\alpha$. Ce point est l'orthocentre du triangle aplati formé par la tangente $\alpha b'$ et deux tan-

Fig. 2.



gentes confondues avec $b\alpha$. La droite pq est donc la directrice de Γ et est, par suite, perpendiculaire à αK. Or, en direction, αK est conjuguée de bb' par rapport aux droites αb et $\alpha b'$: la perpendiculaire qp' à bb' est

donc conjuguée de qp par rapport à l'angle $bq\alpha$; autrement dit, b est le milieu de pp'.

Par suite, pour construire le point α, il suffit de prendre le symétrique p' de p par rapport à b, de mener les perpendiculaires pq et $p'q$ aux droites bt et bb', et de projeter leur point commun q sur la trace $b\alpha$ du plan tangent en a aux hyperboloïdes H.

Le milieu o du segment pq est évidemment situé sur la perpendiculaire bo à bb' et sur la perpendiculaire qo au milieu de $b\alpha$. Si donc on suppose connus le point ω, la génératrice A et la trace bb', on voit que la droite pq passe par le point fixe o quand le point c se déplace sur la droite ab : cette remarque permet de construire facilement la trace bt du plan tangent en c aux surfaces réglées satisfaisant à ces données, ce qui était justement la question posée par M. Chomé.

Supposons que le plan de la courbe (a) soit normal à la droite ab : les droites pq sont alors les traces sur le plan P des plans déterminés par le point ω et les normales aux surfaces H aux différents points de ab : la droite ωo appartient donc au paraboloïde de ces normales. Le plan $a\omega oq$ est donc le plan tangent à ce paraboloïde au point ω; d'ailleurs, le point a est le point central de la génératrice $a\omega$ et le plan tangent à ce point est le plan ωab. Le paramètre de distribution des plans tangents au paraboloïde des normales est donc, pour la génératrice $a\omega$:

$$K = \frac{a\omega}{\operatorname{tang} baq},$$

ou encore, en désignant par φ l'angle $ba\alpha$,

$$K = \frac{2a\omega}{\operatorname{tang}\varphi}.$$

Or, si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure

principaux de la surface H en a, on a évidemment, d'après la relation d'Euler,

$$\frac{1}{a\omega} = \frac{1}{\rho_1}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\rho_2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

et

$$\frac{1}{\rho_1}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0.$$

On en déduit aisément

$$K = \sqrt{\rho_1\rho_2}.$$

On retrouve ainsi ce théorème, dû à Ossian Bonnet, et dont la démonstration directe est immédiate :

Si l'on considère le paraboloïde des normales à une surface réglée S le long d'une génératrice, le paramètre de distribution des plans tangents à ce paraboloïde le long d'une des normales considérées est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux de S au pied de cette normale.

Ce théorème s'appliquerait évidemment aussi à la normalie à une surface, admettant pour base une ligne asymptotique de cette surface. Son application aurait permis d'établir rapidement la construction précédemment obtenue, dans le cas où la courbe (a) est normale à la génératrice abc.

[M²3d]

SUR UNE CERTAINE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

La surface qui a pour équation

$$(X+Y+Z+T)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3 - T^3 = 0.$$

à laquelle Clebsch a donné le nom de *surface diagonale*, présente certaines particularités que je crois bon de signaler ici ([1]).

I.

1. D'abord la surface diagonale a ses vingt-sept droites réelles et distinctes, et la détermination de celles-ci peut s'effectuer facilement. Si l'on ordonne l'équation par rapport à une des lettres, T, par exemple, elle devient

$$T^2(X+Y+Z)+T(X+Y+Z)^2+(Y+Z)(Z+X)(X+Y)=0,$$

ou

$$T(X+Y+Z)(X+Y+Z+T)+(Y+Z)(Z+X)(X+Y)=0;$$

cette forme d'équation met en évidence les droites

$$\begin{cases} T=0, \\ Y+Z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} T=0, \\ Z+X=0, \end{cases} \quad \begin{cases} T=0, \\ X+Y=0. \end{cases}$$

et, à cause de la symétrie de l'équation initiale, on peut trouver d'autres systèmes de trois droites dans chacune des faces du tétraèdre de référence; on a ainsi douze droites.

2. On voit de plus que le plan

$$X+Y+Z+T=0$$

coupe la surface suivant un triangle formé par les traces des plans

$$Y+Z=0, \qquad Z+X=0, \qquad X+Y=0$$

sur le premier.

([1]) *Voir* un très intéressant Mémoire de Eckardt au Tome X des *Math. Annalen;* 1876.

3. On trouve les autres droites en menant par les trois dernières droites obtenues des plans convenablement déterminés. Pour simplifier le calcul posons

$$X + Y = 2P, \qquad Z + T = 2Q,$$
$$X - Y = 2P', \qquad Z - T = 2Q'.$$

L'équation de la surface peut s'écrire

$$4(P + Q)^3 - P^3 - 3PP'^2 - Q^3 - 3QQ'^2 = 0.$$

L'intersection de la surface par le plan

$$P + \lambda Q = 0$$

est donnée par

$$4(1 - \lambda)^3 Q^3 + \lambda^3 Q^3 + 3\lambda QP'^2 - Q^3 - 3QQ'^2 = 0.$$

Si l'on supprime dans cette équation le facteur Q, il reste

$$[4(1 - \lambda)^3 + \lambda^3 - 1] Q^2 + 3\lambda P'^2 - 3Q'^2 = 0;$$

cette équation est celle d'une quadrique qui se réduit à un système de deux plans si l'on a

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad 3(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Les solutions $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ conduisent à des droites déjà obtenues; il reste à prendre

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

on a donc les droites

$$\begin{cases} 2(X + Y) + (3 + \sqrt{5})(Z + T) = 0, \\ 2(Z - T) - (\sqrt{5} + 1)(X - Y) = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2(X + Y) + (3 + \sqrt{5})(Z + T) = 0, \\ 2(Z - T) + (\sqrt{5} + 1)(X - Y) = 0 \end{cases}$$

et celles qu'on obtient en changeant le signe devant $\sqrt{5}$; on a ainsi quatre droites. Les huit autres s'obtiennent en permutant les lettres X, Y, Z, T.

On a donc les vingt-sept droites.

II.

4. Il peut arriver qu'en un point d'une surface toutes les courbures soient nulles, on a alors des ombilics d'une nature spéciale qui ont pour homologues, si l'on transforme homographiquement la surface, des points de même nature. Ces points peuvent exister sur des surfaces du troisième ordre, il peut même y en avoir une infinité. M. de Saint-Germain a montré que ce cas se présentait pour les surfaces dont l'équation est de la forme

$$Y^3 + XF(X, Y, Z, T) = 0,$$

F étant une fonction du deuxième degré (*Comptes rendus,* 14 décembre 1885).

Il est facile de constater que chaque sommet du tétraèdre de référence est un de ces ombilics spéciaux; par exemple le plan

$$X + Y + Z = 0$$

coupe la surface suivant trois droites situées dans les faces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

On a encore six ombilics spéciaux aux points d'intersection des arêtes du tétraèdre avec le plan

$$X + Y + Z + T = 0.$$

Par exemple, le plan

$$X + Y = 0$$

contient les droites

$$\begin{cases} X + Y = 0, \\ Z + T = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = 0, \\ T = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = 0, \\ Z = 0. \end{cases}$$

On a donc dix ombilics spéciaux dont quatre sont les sommets d'un tétraèdre, et six les traces des arêtes sur un même plan.

Il est facile de voir que les surfaces ayant pour équation

$$(X + Y + Z + T)^m - X^m - Y^m - Z^m - T^m = 0,$$

m étant impair, possèdent aussi douze ombilics ayant même disposition que pour le cas de $m = 3$.

[O2q]

SUR LA DÉTERMINATION DES COURBES PAR UNE ÉQUATION ENTRE LES DISTANCES TANGENTIELLES DE LEURS POINTS A DES COURBES DONNÉES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Si $M_1 A = l_1$, $M_2 A = l_2$, ..., $M_n A = l_n$ sont les distances tangentielles du point A aux courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n), l'équation

$$F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$$

définit une courbe (A).

Pour que les points de cette courbe soient déterminés sans ambiguïté, il faut que le signe des distances $l_1, l_2, \ldots, l_n$ soit défini avec précision.

Rappelons la convention que nous avons adoptée dans notre *Cours de Géométrie infinitésimale*. Prenant pour sens positif d'une courbe en un point le sens direct (trigonométrique positif) de son cercle osculateur en ce point, nous étendons ce sens positif à toute

la tangente; dès lors le sens positif de la normale est celui qui va du point considéré sur la courbe vers le centre de courbure correspondant [1] (*loc. cit.*, p. 261).

On peut donc dire que la distance l_i sera prise positivement ou négativement suivant que le segment M_iA de la tangente, considéré comme une force appliquée en M_i, tendra à faire tourner le rayon de courbure $M_i\mu_i$ autour du centre de courbure μ_i dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

La détermination de la normale en A à la courbe (A) résulte du théorème suivant, donné dans notre *Cours* (p. 271) :

Si, sur la tangente AM_i, *on porte le segment* $AL_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$ *et si la perpendiculaire élevée à cette tangente en* L_i *coupe au point* λ_i *la droite qui joint le point* A *au centre de courbure* μ_i *répondant au point* M_i, *la normale en* A *à la courbe* (A) *est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs* $A\lambda_i$.

Il suffit d'ajouter que chaque segment AL_i doit être porté sur la tangente correspondante (dont le sens positif a été ci-dessus défini) *en tenant compte de son signe*.

Si la courbe (M_i) est un cercle, on peut, du point A, lui mener deux tangentes AM_i et AM'_i, et si l_i et l'_i sont les longueurs de ces tangentes prises avec leurs signes, on a

$$l_i + l'_i = 0.$$

[1] Si la courbe se réduit à un point, on peut choisir indifféremment le sens positif sur une droite passant par ce point, mais une fois ce choix fait, le sens positif de la direction normale est parfaitement défini; c'est celui que l'on obtient en faisant tourner de 90°, dans le sens direct, la partie positive de la première droite.

Si donc on a, pour chaque point de la courbe (A),

$$F(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n) = 0,$$

on a aussi

$$F(l_1, \ldots, -l'_i, \ldots, l_n) = 0.$$

La normale obtenue en partant de l'une ou de l'autre équation doit donc être la même, c'est-à-dire que le vecteur $A\lambda_i$ doit être le même dans les deux cas.

Or, on a évidemment

$$\frac{\partial F}{\partial l_i} + \frac{\partial F}{\partial l'_i} = 0.$$

En d'autres termes, les segments AL_i et AL'_i sont égaux et de signes contraires, de même que les segments AM_i et AM'_i, et comme la droite $A\mu_i$ est la bissectrice de l'angle $M_iAM'_i$ on voit immédiatement que le point λi est le même dans les deux cas.

Remarque. — On peut changer *à la fois* le sens de tous les segments $A\lambda_i$. La direction de leur résultante reste la même. Donc, au lieu de porter à partir de A sur chaque segment M_iA le segment $AL_i = \frac{\partial F}{\partial l_i}$, on peut porter le segment $AL_i = -\frac{\partial F}{\partial l_i}$.

Exemple. — Supposons que l'équation donnée soit $\Sigma l_i^2 = h^2$. Dès lors $\frac{\partial F}{\partial l_i} = l_i$. Nous pouvons donc prendre $AL_i = -l_i$, ce qui, *quel que soit le signe de* M_iA, fait coïncider L_i avec M_i et, par suite, λ_i avec μ_i. Donc, dans ce cas, la normale est dirigée suivant le vecteur résultant des vecteurs $A\mu_i$; en d'autres termes, *elle passe par le centre de gravité des centres de courbure* μ_i. On retrouve ainsi un cas particulier d'un théorème

de M. J. Pomey (*Nouvelles Annales*, 1889, p. 527), que, dans le cas général, nous avons déjà rattaché à notre théorème (*Nouvelles Annales*, 1890; p. 291).

[B1a]

REMARQUES SUR UNE MATRICE;

Par M. L. Ravut.

Considérons la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la sixième puissance égale 1. Il s'agit de prouver que l'on a, pour équation identique de cette matrice,

$$(S^2 - 1)(S^3 - 1) = 0.$$

Pour l'établir, posons

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p + q.$$

D'une manière générale, nous avons

$$S^n = p^n + q^n.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(S^2-1)(S^3-1)=S^5-S^3-S^2+1$$

$$=p^5-p^3-p^2+\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}+q^5-q^3-q^2+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\left(p^2-\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right)\left(p^3-\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$+\left(q^2-\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right)\left(q^3-\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right).$$

Les deux facteurs

$$p^2-\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad q^3-\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

étant nuls, le dernier membre des égalités précédentes est égal à zéro. Par suite

$$(S^2-1)(S^3-1)=0.$$

Si l'on considérait la matrice

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

on aurait évidemment

$$S^2 - 1 = 0,$$

mais l'on aurait aussi

$$(S^2 - 1)(S - 1)^3 = 0.$$

[K14b]

QUELQUES REMARQUES SUR LE THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LES POLYÈDRES [1];

Par M. Émile WEILL,
Agrégé des Sciences mathématiques.

1. Nous définirons un *polyèdre* : une figure formée d'un nombre fini de polygones dont les plans diffèrent et tels que chacun de leurs côtés appartienne à deux de ces polygones et à deux seulement.

Théorème d'Euler. — *Soient* F *le nombre des faces d'un polyèdre,* S *le nombre de ses sommets,* A *le nombre de ses arêtes. Il existe des polyèdres pour lesquels ces quantités sont liées par la relation*

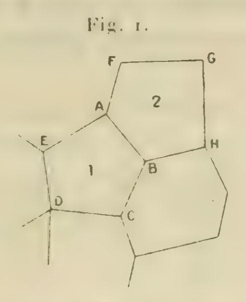
$$F + S = A + 2.$$

Supposons un polyèdre réalisé matériellement et cherchons à en séparer les faces les unes des autres. Nous pourrons d'abord enlever la face 1, limitée par le contour ABCDE, en donnant un trait de scie continu suivant ABCDE, A puis la face 2, en donnant un trait de

(1) La démonstration donnée dans cet article a été inspirée par la lecture du Chapitre IV du *Traité sur les fonctions algébriques et leurs intégrales,* de MM. Appell et Goursat.

scie continu suivant AFGHB, ce trait étant nécessairement interrompu en B et ainsi de suite.

Fig. 1.



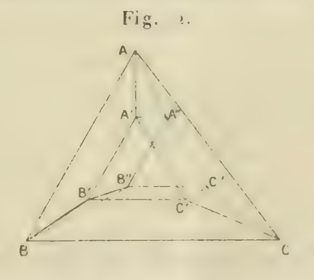
Nous supposerons que tous les traits de scie ainsi tracés sont efficaces, c'est-à-dire que chacun d'eux détache une face.

Ceci ne se présente pas toujours. Considérons, par exemple, le polyèdre obtenu comme suit :

Soient trois triangles ayant leurs côtés parallèles, mais situés dans trois plans différents. Joignons les sommets homologues.

Traçons dans ce polyèdre A B C A′ B′ C′ A″ B″ C″ le trait de scie fermé ABCA, il est inefficace. Opérons encore

Fig. 2.



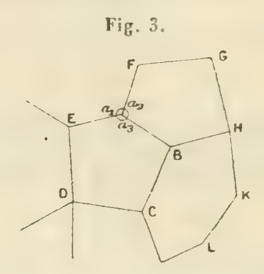
autrement : traçons les deux traits de scie A A′ B′ B A et B′ C′ C B; chacun d'eux sépare une face. Si, ensuite, nous traçons le trait B B″ B′, il est inefficace.

Si cette particularité ne se présente pas, nous aurons

évidemment séparé toutes les faces après F — 1 traits de scie.

Enlevons maintenant le sommet A à l'emporte-pièce; il sera remplacé par un trou. Ce trou n'altérera pas le

Fig. 3.



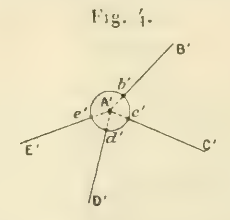
nombre de traits de scie continus nécessaires pour séparer toutes les faces du polyèdre. Le trait ABCDEA sera simplement remplacé par le trait a_3BCDEa_1.

Il n'en sera plus de même si nous supposons un sommet A′ du polyèdre autre que le sommet de départ remplacé par un trou.

A ce sommet aboutissent plusieurs faces 1′, 2′, . , . .

Soit 1′ la première de ces faces que nous séparons du reste du polyèdre. Le trait de scie qui suivait d'abord le

Fig. 4.



contour B′A′C′ sera morcelé en deux portions : l'une venant suivant B′b', l'autre partant de c' et se dirigeant suivant c'C′. Les autres traits de scie partiront des points d', c', au lieu de partir du point A′; ce sera leur seul changement.

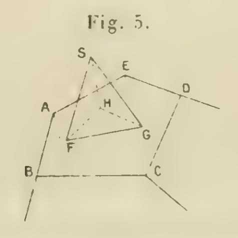
Chaque fois que nous remplacerons ainsi un sommet autre que le sommet de départ par un trou, nous augmenterons d'une unité le nombre de traits de scie continus nécessaires pour séparer toutes les faces du polyèdre.

Nous supposerons que, pour séparer toutes les faces du polyèdre, il ne soit pas nécessaire d'avoir deux ou un plus grand nombre de sommets origines de traits de scie.

Expliquons-nous sur un exemple :

Soient ABCDE une face d'un polyèdre quelconque et

Fig. 5.



FGH un triangle situé dans le plan de cette face et à son intérieur. Un point S de l'espace et le triangle FGH déterminent un angle solide qui, avec le polyèdre primitif, constitue un nouveau polyèdre SFGHABCDE....

Si nous prenons le sommet S comme origine des traits de scie, nous séparerons d'abord les faces SFG, SGH, SHF, puis nous serons arrêtés et nous devrons choisir une nouvelle origine de traits de scie sur la seconde portion du polyèdre.

Nous supposerons enfin que, si nous remplaçons tous les sommets du polyèdre par des trous, le nombre des trous obtenus est déterminé sans ambiguïté ; c'est dire qu'il n'existe pas de sommet par lequel passent plusieurs nappes du polyèdre. Dans ce dernier cas, en enlevant le sommet considéré, on obtiendrait pour ainsi dire un trou multiple.

Dans ces conditions, les S sommets étant remplacés par S trous dont S — 1 sont efficaces, le nombre de traits de scie nécessaires pour séparer toutes les faces est

$$F - 1 + S - 1 = F + S - 2.$$

D'autre part, ce nombre est égal au nombre d'arêtes du polyèdre puisque tous les sommets sont enlevés, et l'on a bien

$$F + S - 2 = A,$$
$$F + S = A + 2.$$

C. Q. F. D.

Nous appellerons, avec M. Jordan, *polyèdres eulériens*, les polyèdres auxquels le théorème d'Euler est applicable.

Théorème. — *Les polyèdres convexes sont eulériens.*

On démontre facilement que si un polyèdre présente la première particularité écartée dans la démonstration précédente, il existe un contact fermé, ne se coupant pas, formé d'arêtes du polyèdre et tel que si l'on coupe la surface polyédrale suivant ce trait, elle n'est pas partagée en deux portions distinctes; un polyèdre convexe ne peut donc présenter la première particularité.

Il ne peut présenter non plus la seconde particularité écartée car il faudrait qu'il ait une face limitée par plusieurs contours polygonaux.

Enfin, il ne peut présenter un sommet par lequel passent plusieurs nappes.

On peut donc lui appliquer la démonstration précédente.

2. On sait que le théorème d'Euler peut être généralisé. Ceci nous permettra de voir que les polyèdres eulé-

riens considérés dans ce qui précède ne sont pas les seuls de cette espèce.

Considérons un polyèdre ne présentant que la première singularité et supposons qu'on puisse tracer n traits de scie continus fermés sans morceler la surface polyédrale; ces traits de scie une fois tracés, la démonstration donnée est valable et la relation d'Euler devient :

$$F + S = A + 2 - n$$

(ce qui nous montre que le nombre n est un nombre invariable attaché au polyèdre).

Nous voyons que le second membre de la relation d'Euler a diminué.

Considérons maintenant un polyèdre ne présentant que la seconde singularité et supposons qu'il soit nécessaire d'avoir $m + 1$ sommets origines de coupures. Il n'y aura plus que S — $(m + 1)$ trous efficaces et la relation d'Euler devient

$$F + S = A + 2 + m.$$

Le second membre a augmenté.

On voit donc qu'un polyèdre pourra présenter des singularités diverses de telle façon que l'augmentation du second membre de la relation d'Euler, due à certaines d'entre elles, compense la diminution due aux autres.

Voici un exemple de ce fait :

Soient ABCDEF et A'B'C'D'E'F' deux faces d'un polyèdre eulérien p. On a

$$(1) \qquad f + s = a + 2.$$

Soient, situés respectivement dans les plans de ces faces et intérieurs à leurs contours, deux polygones

GHKL et G′H′K′L′ qui sont deux faces d'un second polyèdre eulérien p' pour lequel on a

(2) $$f' + s' = a' + 2.$$

Fig. 6.

L'accolement des polyèdres p et p' donne un polyèdre P pour lequel on a

$$F = f + f' - 2, \qquad S = s + s', \qquad A = a + a'.$$

Additionnant membre à membre les équations (1) et (2) il vient :

$$F + S = A + 2.$$

3. Nous avons vu l'influence des deux premières singularités écartées précédemment sur la relation d'Euler. Cherchons à voir ce qui se passe lorsque le polyèdre présente un sommet auquel aboutissent plusieurs nappes.

Considérons un polyèdre quelconque et son polyèdre polaire. On sait que si le théorème d'Euler ou une de ses généralisations est applicable au premier, ce même théorème ou la même généralisation est applicable au second.

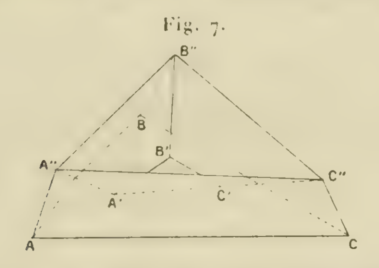
Si le polyèdre donné présente une face limitée par plusieurs contours polygonaux, le second présente un sommet par lequel passent plusieurs nappes de la surface polyédrale.

Nous nous bornerons au cas où le polyèdre donné présente une face limitée par deux contours polygonaux distincts.

De deux choses l'une : ou l'on ne peut pas passer d'un des sommets de l'un des polygones limitant cette face à l'un des sommets de l'autre polygone en suivant constamment des arêtes du polyèdre (c'est le cas de la seconde particularité que nous avons citée); ou l'on peut passer de l'un à l'autre de ces polygones en suivant les arêtes du polyèdre. Donnons un exemple de ce dernier cas.

Traçons, dans un plan, deux triangles ABC, A'B'C' ayant leurs côtés parallèles, le triangle A'B'C' étant

Fig. 7.



intérieur à ABC, et dans un plan parallèle au premier un triangle A''B''C'' ayant ses côtés parallèles à ceux des deux premiers; joignons AA'', A''A', BB'', B''B', CC'', C''C'. Le polyèdre obtenu jouit de la propriété énoncée.

Dans le premier cas, le polyèdre polaire du polyèdre donné a deux nappes passant par un sommet σ et telles qu'il est impossible, en partant de σ sur une des nappes, de revenir en ce point sur l'autre nappe en suivant constamment des arêtes du polyèdre. Si le polyèdre ne présente que cette singularité, le second membre de la relation d'Euler est plus grand que $A + 2$.

Dans le second cas, le polyèdre a deux nappes passant par un sommet σ et telles qu'il est possible, en partant de σ sur une des nappes du polyèdre, de revenir en ce point sur l'autre nappe en suivant constamment des

arêtes. Si le polyèdre ne présente pas d'autre singularité, le second membre de la relation d'Euler est plus petit que A + 2.

[A3k]

REMARQUE AU SUJET DE LA QUESTION DE CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » EN 1896;

Par M. E. MALO,
Capitaine du Génie à Sétif.

Il s'agit de l'interprétation géométrique des racines d'un polynome $R(x)$ du quatrième degré, interprétation qui m'avait échappé lorsque je me suis jadis occupé de cette question, et qui n'a peut-être pas été aperçue jusqu'ici, bien qu'elle soit simple et intéressante.

Soient A, B, C, D *les points figuratifs des racines de l'équation* $F(x) = 0$; il existe six droites passant trois par trois par ces quatre points, et qui, en outre, se coupent deux par deux en trois autres points E, F, G. Si l'on écarte successivement les couples qui se coupent en E, F, G, on a trois systèmes de quatre droites qu'on peut désigner convenablement par la notation (E), (F), (G), et dont chacun détermine une parabole inscrite : *les foyers* e, f, g, *de ces paraboles sont les points figuratifs des racines du covariant* $R(x)$.

Les triangles EFG, efg, *sont homologiques.*

Le centre d'homologie I appartient en commun à trois cercles passant respectivement par l'un des points E, F, G et par les points milieux de ceux des côtés du quadrangle ABCD qui se coupent en E, en F, en G; les trois points où les cercles dont il s'agit se rencontrent encore deux à deux sont les points e, f, g.

Le cas particulièrement important où les points A, B, C, D sont en ligne droite, c'est-à-dire les racines de $F(x)$ toutes réelles, échappe à cette figuration; mais on peut en donner une autre, également simple et curieuse.

Alors, en effet, il existe une cartésienne admettant la droite joignant les points A, B, C, D comme axe et ces points comme sommets; les trois foyers de cette cartésienne figurent les racines du covariant $R(x)$, réelles par suite, en même temps que celles de $F(x)$.

En somme, toutes les propositions partielles dont se compose la question de concours des *Nouvelles Annales* sont susceptibles d'une figuration, ou même d'une démonstration, géométrique; mais les deux exemples donnés ci-dessus sont probablement les plus curieux en même temps que les plus simples.

Le premier considéré en lui-même, et indépendamment de la proposition d'Analyse à laquelle il est lié implicitement, constitue un théorème qui pourrait peut-être être proposé comme *question* dans votre Recueil. Il suffirait, pour avoir un énoncé indépendant, de remplacer les mots soulignés par ceux-ci :

les sommets d'un quadrangle,

et par :

les foyers e, f, g de ces paraboles forment un triangle homologique du triangle EFG.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES; CONCOURS DE 1896. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Laon.

On considère une sphère variable Σ *orthogonale à une sphère fixe* S *et tangente à une autre sphère fixe* S_1.

1° *Lorsque la sphère* Σ *est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan* P, *le lieu du point de contact de* Σ *et de* S_1 *est un cercle.*

Démontrer que, si le plan P *est tangent à la sphère* S, *le lieu du centre de la sphère* Σ *est une section conique ayant pour foyer le point de contact de* S *et de* P.

Examiner le cas où le plan P *est tangent à la sphère* S *en un point du cercle d'intersection de* S *et de* S_1.

2° *On peut déterminer sur la ligne des centres de* S *et de* S_1 *un point* f *tel que la sphère* Σ_0, *concentrique à* Σ *et passant par* f, *reste toujours, quand* Σ *varie, tangente à une sphère fixe* D *ayant pour centre le point* f_1 *centre de* S_1.

3° *Soient* m *le centre de* Σ_0 *et* m' *le point de contact de* Σ_0 *et de* D. *Lorsque le point* m' *décrit un cercle de* D, *le point* m *reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

Discuter en supposant que le plan du cercle considéré sur D *se déplace parallèlement à lui-même.*

4° *Soit* T *le plan perpendiculaire au milieu du seg-*

ment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère D; *lorsque le plan* T *passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.*

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. *Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.*

5° *Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.*

1° Toutes les sphères Σ dont les centres sont situés dans un plan P sont orthogonales à ce plan; par hypothèse, elles sont orthogonales à S; donc elles passeront constamment par deux points fixes A et B situés sur la perpendiculaire abaissée du centre O de S sur le plan P. Ces points A et B sont les points limites du faisceau de sphères déterminé par le plan P et la sphère S.

Si le plan P ne coupe pas S, le faisceau de ces sphères est du premier genre, les points limites A et B sont réels et symétriques par rapport au plan P (*fig.* 1).

Si le plan P coupe S, le faisceau est du second genre, les points limites A et B ne sont pas réels.

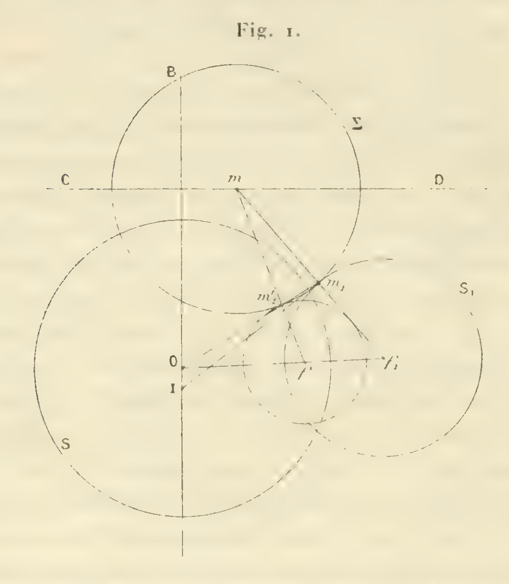
Dans l'un ou l'autre de ces cas, si l'on coupe la sphère S_1 par une sphère quelconque Σ' du faisceau conjugué, le plan radical de cette sphère auxiliaire et de S_1 rencontre le diamètre de S perpendiculaire au plan P en un point I, tel que $IA \times IB$ égale la puissance de I par rapport à la sphère S_1. Or, les points de contact des sphères Σ et de S_1 sont les points de contact des plans tangents menés de I à la sphère S_1; donc le lieu des points de contact de la sphère S_1 et des sphères Σ considérées est le cercle de S_1, qui est situé dans le plan polaire de I par rapport à S_1.

Dans le cas particulier où P est tangent à S, les points A et B sont confondus avec le point de contact A ; et si p désigne l'un des points de contact d'une des sphères Σ et de S_1 on aura

$$AI \times IA = \overline{Ip}^2 \qquad \text{d'où} \qquad IA = Ip ;$$

par suite, la sphère S', décrite de I comme centre avec un rayon égal à IA, passe par tous les points tels que p.

Fig. 1.



Cette sphère S' est, de plus, orthogonale à la sphère S_1 et, par suite, elle est inscrite dans le cône droit qui a son sommet en f_1, centre de S_1, et qui a pour base le cercle lieu des contacts des sphères Σ et S_1. D'ailleurs, les centres des sphères Σ sont sur les génératrices de ce cône droit et dans le plan P, par suite, à l'intersection du cône droit et du plan P tangent en H à la sphère S' inscrite dans ce cône. D'après le théorème de Dandelin,

cette section conique a pour foyer le point A; c'est cette section qui est, dans le plan P, le lieu des centres des sphères Σ.

Si le plan P est tangent à la sphère S en un point du cercle d'intersection de S et de S_1, le lieu du point de contact est un point, le lieu du centre, dans le plan tangent à S, des sphères Σ se réduit à un point, en général, et si S_1 est orthogonale à S, le lieu du centre est la droite Af_1, f_1 étant le centre de S_1.

2° On peut déterminer sur la ligne des centres de S et de S_1 un point f tel que la sphère Σ_0, concentrique à Σ et passant par f, reste toujours, quand Σ varie tangente à une sphère fixe D ayant pour centre le point f_1 centre de S_1 (*fig.* 1).

En effet, les sphères Σ étant tangentes à S_1 et orthogonales à S sont aussi tangentes à une seconde sphère S'_1 inverse de S_1 par rapport au centre O de S, la puissance d'inversion étant le carré du rayon de S. Soit f le centre de S'_1. Lorsque le centre O est extérieur à S_1, les sphères Σ sont tangentes de la même manière à S_1 et à S'_1 et alors la différence entre les distances du centre m de Σ à f et à f_1 est constante et égale à la différence du rayon des sphères inverses S_1 et S'_1. Lorsque O est sur S_1 le point f est à l'infini sur Of_1. Lorsque O est à l'intérieur de S_1 les sphères S_1 et S'_1 sont tangentes à Σ, l'une intérieurement, l'autre extérieurement, et alors la somme $mf + mf_1$ est constante et égale à la somme des rayons des sphères S_1 et S'_1 inverses l'une de l'autre. Donc, dans l'espace, le lieu du point m, centre des sphères Σ, est une quadrique de révolution ayant pour foyers les points f et f_1, l'un d'eux f pouvant être à l'infini. L'un des axes de cette quadrique est la droite Of_1. Par suite, si de m comme centre, avec un rayon égal à mf, on décrit

une sphère Σ_0, cette sphère sera tangente à la sphère directrice D relative à l'autre foyer.

3° m désignant le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de D, m' décrivant un cercle de D, m reste sur la quadrique de révolution et puisque les points m, m', f_1 sont alignés, m est aussi sur le cône droit de sommet f_1 qui a pour base le cercle considéré sur D. Or, l'intersection d'une des nappes d'un cône de révolution, qui a son sommet à l'un des foyers d'une quadrique de révolution avec cette quadrique, est une courbe plane. Donc le point m décrit une courbe plane quand m' décrit un cercle D. Cette courbe pourra être une ellipse, une hyperbole ou une parabole, puisqu'elle est la section plane γ d'un cône de révolution.

Si le plan du cercle considéré sur D se déplace parallèlement à lui-même, l'axe du cône de révolution est invariable et, puisque, d'après un théorème connu, le pôle du plan de la section γ, par rapport à la quadrique, est sur cet axe, il arrive que le plan de la section tourne autour de la *droite conjuguée* de celle qui est l'axe commun des cônes droits considérés. Cette droite est perpendiculaire au plan de ff_1 et de la perpendiculaire abaissée de f_1 sur le plan de l'un des cercles considérés. Soit P' ce plan. En prenant la section de la quadrique par ce plan P', la droite conjuguée de l'axe commun des cônes passe par le pôle de cet axe par rapport à la section méridienne du plan P'. La discussion et l'étude de la section se font facilement en faisant tourner dans le plan méridien une droite autour du pôle, par rapport à la section méridienne, de l'axe commun des cônes.

4° Le plan T perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' de la sphère D est tangent à la quadrique, le point de contact est sur f_1m'. Lorsque ce plan tangent tourne autour d'un point fixe q,

il enveloppe le cône de sommet q, circonscrit à la quadrique. La courbe de contact est l'intersection de la quadrique et du plan polaire de q par rapport à cette quadrique. Cette courbe étant plane, le cône de sommet f_1 qui l'aura pour base sera de révolution, son axe étant $f_1 q$. Or les génératrices de ce cône sont les droites fm'. Donc le lieu du point m' sur la sphère D sera l'intersection du cône droit de sommet f_1 et de la sphère D : ce sera un cercle que nous appellerons γ_q.

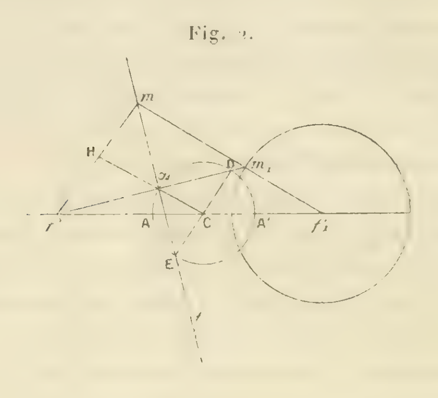
Si le point q se déplace dans un plan fixe, la sphère de rayon qf, qui coupe S_1 précisément suivant le cercle γ_q, se déplace en passant constamment par deux points fixes f et φ, φ étant le symétrique de f par rapport au plan dans lequel se meut q. Toutes les sphères de centre q qui passent par f et φ sont telles que si on les accouple avec S_1 il existe sur $f\varphi$ un point μ dont la puissance par rapport à S_1 est égale à $\mu f \times \mu\varphi$; par suite, le point μ, qui est d'égale puissance par rapport à S_1 et par rapport à l'une quelconque des sphères du faisceau considéré, est situé dans le plan radical de l'une de ces sphères et de S_1. Or le cercle γ_q est dans ce plan radical; donc les plans des cercles γ_q passent constamment par le point fixe μ. Il en résulte que les cercles γ_q sont orthogonaux à un cercle fixe de D qui n'est autre que l'intersection de S_1 et du plan polaire du point μ par rapport à cette sphère S_1.

Dans le cas où le point q décrit une droite fixe, il peut être considéré comme se déplaçant simultanément dans deux plans quelconques passant par cette droite. Par suite les cercles γ_q ont leurs plans passant par la droite $\mu\mu'$ des points fixes correspondant aux plans envisagés; par suite, ces cercles sont orthogonaux à deux cercles de S_1 et jouissent de propriétés connues.

5° Soit c le milieu de ff_1 (*fig.* 2), les droites cm et

fm' se coupent en un point M qui demeure dans un plan fixe quand on fait varier Σ_0. En effet, prenons pour plan de figure une section méridienne de la quadrique de

Fig. 2.



révolution. Figurons le cercle directeur de centre f_1; soient f le point fixe de Of_1, c le milieu de ff_1, m un point de la conique méridienne correspondant au point m' du cercle directeur, α la projection du foyer f sur la tangente mt, et D et E les points de rencontre du cercle principal avec fm' et mt. Nous remarquerons d'abord que fm est parallèle à DE, car les angles $CD\alpha$, $C\alpha D$, $H\alpha f$ sont égaux; de plus, $C\alpha$ étant parallèle à fm' et le triangle fmm' étant isoscèle, il en est de même de $f\alpha H$, H étant le point d'intersection de $C\alpha$ et de fm; les angles $Hf\alpha$ et αDC sont égaux, par suite CD et fM sont parallèles. Cela posé, le faisceau $C(DM\alpha f)$ est harmonique, puisque mf parallèle au rayon CD est divisé par le rayon $C\alpha$ en deux parties égales; f et M sont donc conjugués harmoniques par rapport à αD. Donc la polaire de f par rapport au cercle principal passe par M. Il en résulte que, dans le plan de la figure, le lieu de M est la directrice relative au foyer f; et, dans l'espace,

le lieu de M est le plan directeur de la quadrique relatif au foyer f.

VARIÉTÉS.

Prix Lobatchefsky (premier concours, 1897).

La Société physico-mathématique de Kasan a l'honneur d'informer qu'elle a décerné, dans sa séance solennelle du 3 novembre (22 octobre) 1897, le prix de N.-I. Lobatchefsky à M. Sophus Lie, professeur ordinaire à l'Université de Leipzig, pour son Ouvrage : *Theorie der Transformationsgruppen*, Band III. Leipzig, 1893.

Les mentions honorables sont décernées :

A M. L. Gérard, professeur au lycée Ampère (Lyon), pour son Ouvrage : *Thèse sur la Géométrie non euclidienne*. Paris, 1892.

A M. E. Cesàro, professeur ordinaire à l'Université Royale de Naples, pour son Ouvrage : *Lezioni di Geometria intrinseca*. Napoli, 1896.

Et à M. G. Fontené, professeur au collège Rollin, pour son Ouvrage : *L'hyperespace à n — 1 dimensions*. Paris, 1892.

La médaille d'or de N.-I. Lobatchefsky, destinée, selon le § 16 du règlement du prix Lobatchefsky, à récompenser le travail des personnes qui aident la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les Ouvrages présentés au concours, a été décernée, dans la même séance solennelle du 3 novembre 1897, à M. Félix Klein, professeur ordinaire à l'Université de Göttingue, pour son rapport sur l'Ouvrage de M. Lie.

Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan, sous le titre : *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises* (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie).

Les rapports sur les Ouvrages de M. Gérard, Cesàro et Fontené, ont été donnés par MM. les professeurs T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la Commission. En outre, ont pris part aux travaux de la Commission, MM. les professeurs D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof (secrétaire de la Commission).

Le nombre total des Ouvrages présentés au concours a été égal à neuf.

Extrait du règlement du prix Lobatchefsky.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papiers. Il reste à la volonté de la Société d'en augmenter avec le temps la valeur, si l'état du capital le lui permet (§ 4).

Le prix Lobatchefsky est destiné aux Ouvrages relatifs à la Géométrie, et de préférence à la Géométrie non euclidienne (§ 5).

Sont admis à concourir à ce prix les Ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la Société physico-mathématique par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix (§ 6).

Dans aucun cas le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où se présenteront plusieurs Ouvrages d'égale valeur, c'est le tirage au sort qui en décidera (§ 7).

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 novembre 1900. Selon le § 11 du règlement, les Ouvrages

destinés au concours doivent être adressés, à la Société physico-mathématique de Kasan, jusqu'au 3 novembre 1899.

Le Président de la Société physico-mathématique.

A. VASSILIEF.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Lémeray. — ... Dans ma Note *Sur les racines de l'équation* $x = a^x$, parue dans les *N. A.* (décembre 1896), c'est bien involontairement que j'ai omis de citer le Mémoire d'Euler dont parle M. Gravé dans son récent Article : *Sur les expressions dites surpuissances,* Mémoire dont j'ignorais l'existence.

L'attention qu'Euler a prêtée à cette question montre qu'il y attachait quelque importance. Qu'il me soit permis de rappeler que, dans la Note mentionnée ci-dessus, j'ai démontré les limites des surpuissances dans le cas de la variable réelle, et que, dans le numéro de février 1897, j'ai donné la démonstration dans le cas de la variable imaginaire.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, par MM. *Cor* et *Riemann.* — In-8°, 460 p. Nony, 1898.

Ce ne sont pas les Traités d'Algèbre élémentaire qui manquent, et il est certain que la plupart sont, en bien des points, excellents; mais il faut avouer que la plupart ont aussi, surtout là où ils cessent d'être excellents, un air de famille qui se perpétue avec une ténacité singulière; les changements que l'on observe à chaque nouveau venu portent surtout sur les parties bonnes qui, assurément, en deviennent

meilleures encore, mais ne s'observent guère sur les autres qui demeurent dans la plus immobile imperfection.

Les auteurs n'ont pas non plus la tâche trop facile; ils ont à compter avec la tradition, les programmes, les douces habitudes des examinateurs de toute catégorie, la hâte des éditeurs et les épines du sujet; car, même élémentaire, l'Algèbre n'est point sans parties épineuses. Comment écrire un livre en restant au-dessus de toutes ces influences, l'écrire pour lui-même et pour soi-même, selon la formule de l'Art pour l'Art, tempérée par le seul respect de la Science?

Je ne sais si c'est là ce qu'ont voulu faire MM. Cor et Riemann en écrivant leur Livre, mais je suis bien tenté de le croire : la tradition et les épines semblent les avoir très peu gênés; quant au reste, je gage qu'en dépit du frontispice de leur œuvre, ils n'en ont eu souci.

Aussi quel air d'aisance et de liberté dans ces belles pages; il y a une fraîcheur, un rajeunissement des choses qui vous enchantent; des questions usées jusqu'aux moelles vous prennent un air de jeunesse dont on demeure étonné; je citerai la Section consacrée à l'*équation du second degré;* c'est un véritable joyau : il est impossible d'être plus simple et plus précis, plus riche et plus souple; on voit défiler en raccourci, dans quelques pages d'une langue mathématique exquise, toute la théorie des équations entières : les changements de signes, les fonctions symétriques, la transformation, l'élimination; le vieux sujet en est entièrement rajeuni et vivifié; et ce souffle de renouveau se retrouve dans l'exposition, qui vient ensuite, de la méthode si belle et si judicieuse de M. Girod pour la discussion des problèmes du second degré, méthode qui a donné à cette partie de l'Algèbre élémentaire une consistance dont elle manquait entièrement auparavant, et qui n'avait pas encore paru, je crois, dans aucun livre didactique.

Plus loin, nous entrons dans la théorie des fonctions, avec les notions précises de limite et de continuité, le théorème de Cauchy et l'étude directe des fonctions entières et rationnelles les plus simples. L'étude des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires fait l'objet du Chapitre suivant : nous y trouvons une démonstration rigoureuse de l'égalité

$$(a^x)^{x'} = a^{xx'},$$

au lieu du lamentable cercle vicieux qui constitue l'une des

plus immobiles imperfections dont j'ai parlé plus haut; et une belle étude, qui me semble entièrement nouvelle, de l'erreur dans le calcul logarithmique, un petit modèle de précision et d'élégance dans une question où elles ne se rencontrent généralement pas. Je n'aime pas la démonstration des inégalités $\sin x < x < \tang x$, par la considération des aires : elles résultent trop évidemment de la définition même du nombre x, bien antérieure à la mesure de l'aire d'un secteur.

Le dernier Chapitre est consacré aux dérivées, avec d'intéressants exemples d'études de fonctions et la construction des développements en série des fonctions exponentielles logarithmiques et circulaires.

Les auteurs appellent *série* ce qui est communément appelé maintenant une *suite infinie*. La logique voudrait que, suivant que l'on considère les termes d'une suite infinie au point de vue de leur somme ou de leur produit, on parlât de *somme infinie* ou de *produit infini;* cette dernière dénomination est usuelle : il semble que, dans ces derniers temps surtout, le mot *série* tende à prendre exactement le sens de la locution *somme infinie*, à peu près inusitée jusqu'ici ([1]). Peut-être eût-il convenu de maintenir ce sens au mot *série*, et, dans tous les cas, de ne pas le *rétablir* dans le sens de *suite infinie*, terme qui me paraît très convenable, et en faveur duquel on peut invoquer au moins l'ancienneté et l'étymologie.

Mais je n'ai encore dit que tout le bien que je pense de la seconde Partie du beau Livre qui nous occupe. La première ne me plaît assurément pas autant.

Le Livre s'ouvre naturellement par une théorie des opérations sur les nombres positifs et négatifs, d'une belle simplicité, mais où les auteurs ont peut-être été trop préoccupés d'être courts : ainsi n'ont-ils pas suffisamment insisté, je crois, sur la signification algébrique dont est susceptible toute expression arithmétique par suite de l'identité du calcul des nombres positifs avec celui des valeurs absolues.

([1]) J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, n°s 40 et 41. Dans le *Calcolo differenziale* de A. Genocchi, le mot *serie* est employé dans le même sens que par MM. Cor et Riemann; dans la plupart des auteurs antérieurs à notre quart de siècle, par exemple dans Gauss, le mot *série* est employé indifféremment dans le sens de *suite infinie* et de *somme infinie*.

L'étude des polynomes qui vient ensuite ne me satisfait pas entièrement. Je ne comprends pas qu'il y ait lieu de définir à nouveau la somme, la différence ou le produit de deux ou plusieurs polynomes; il me paraît qu'il faut seulement constater que le résultat de ces différentes opérations définies antérieurement peut lui-même être obtenu sous la forme de polynome réduit; ainsi, je ne puis admettre qu'il y ait une convention nouvelle dans ce fait que $-f(x)$ représente le polynome $f(x)$ dont on a changé tous les signes. Enfin, il y a la question capitale de l'identité des polynomes obtenus comme résultats d'une suite d'opérations, quand on les effectue en suivant deux voies différentes, qui demeure un peu dans l'ombre : la démonstration, par exemple, de ce théorème que, dans un produit de plusieurs polynomes, on peut remplacer quelques-uns d'entre eux par leur produit préalablement effectué, est à peine esquissée; l'identité

$$[f(x)+g(x)]\,h(x)=f(x)\,h(x)+g(x)\,h(x),$$

indispensable dans la théorie de la division, est simplement affirmée. Ajouterai-je que cette question des polynomes au début de l'Algèbre élémentaire est un peu irritante, parce qu'elle y est déplacée; qu'elle n'est pas absolument indispensable pour ce qui suit, et qu'elle viendrait beaucoup plus à point au début de l'étude des fonctions, à propos des fonctions entières, alors que, par les notions déjà acquises de limites, la question de l'identité peut être immédiatement résolue.

Quoi qu'il en soit, celui qui comparera cette exposition des principes du calcul algébrique avec ce qui s'écrivait, sur le même sujet, il y a seulement quelques années, sera frappé du chemin parcouru et des progrès véritablement considérables qui ont été réalisés et qui ont leur origine dans les profondes leçons faites à l'École Normale par M. Jules Tannery.

Nous arrivons ensuite dans des régions moins épineuses où la clarté et l'élégance reprennent leurs droits : la théorie du plus grand commun diviseur, l'étude des équations et inéquations du premier degré, celle des déterminants et leur application aux équations linéaires. Dans la théorie des déterminants, les auteurs ont supprimé la notation à double indice et cela pour le plus grand profit de la clarté.

Suis-je parvenu à donner une idée suffisante de la richesse de ce Volume de moins de 500 pages? De la liberté avec la-

quelle il a été composé, du soin avec lequel il a été écrit? De la richesse des matières et de la nouveauté des méthodes? Je l'ai jugé en toute franchise, car il est de ces livres longuement médités et venus à leur heure, qui n'ont rien à redouter de la critique, qui ont en eux-mêmes leur force et qui n'attendent pas d'un éloge complaisant le succès dû à leur très haut et très réel mérite. H. PADÉ.

LEÇONS D'ALGÈBRE, par *Ch. Briot,* revues et mises au courant des nouveaux programmes, par M. *E. Lacour*. Deuxième Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, 17e édition. Delagrave, 1897.

Les *Leçons d'Algèbre* que nous signalons forment, en dépit du titre trop modeste, un Ouvrage vraiment nouveau.

Les personnes dont l'éducation mathématique s'est faite à l'époque où paraissaient les livres d'enseignement de Briot savent quelle en était la lumineuse simplicité; les points essentiels de chaque théorie y apparaissent, dégagés des propositions secondaires; l'abstraction inévitable de certaines définitions ou démonstrations devenait intuitive, des images appropriées en faisant saisir le sens et dirigeant l'enchaînement logique des idées.

La simplicité aussi réelle qu'apparente des programmes du temps facilitait alors le développement de ces qualités. Depuis, les cadres de l'enseignement se sont peu à peu élargis; à tort ou à raison, diverses théories s'y sont glissées et sont généralement développées dans les cours. Les *Leçons d'Algèbre* de Briot, sous leur forme primitive, devenaient incomplètes; les élever au niveau de l'enseignement actuel, et, cependant, conserver leurs qualités fondamentales, semblaient deux tâches incompatibles; M. Lacour a réussi à les concilier.

Élève de Briot, M. Lacour déploie dans son enseignement les qualités de son maître. Je me souviens encore quel était notre étonnement lorsque, à l'École Normale, où certains de nos plus brillants camarades avaient été formés à ses leçons, ceux-ci nous exposaient avec quelle facilité ils avaient appris, sans l'emploi d'indices encombrants, la théorie des déterminants et des équations linéaires. A l'encontre d'une erreur

facile, c'était montrer que les démonstrations, faites sur des exemples particuliers, y gagnent en clarté, sans rien perdre de leur généralité.

Sans négliger les commençants, pour lesquels le nouvel Ouvrage reste ce qu'était celui de Briot, un guide où trouver un développement net et concis des notions nouvelles qui les arrêtent, M. Lacour, en signalant d'astérisques les passages que ceux-ci peuvent négliger, a songé aussi, soit aux bons élèves de Mathématiques spéciales, qu'anime le désir de faire quelques pas au delà du domaine limité par les programmes, soit aux étudiants de nos Facultés des Sciences, pour lesquels la différence des enseignements du Lycée et de l'Université laisse quelques lacunes que ne comble ni l'un ni l'autre.

Nous signalerons particulièrement aux premiers les Chapitres relatifs aux déterminants et aux équations linéaires, les principes fondamentaux des théories des séries et des intégrales définies, notions neuves qui parfois déconcertent nos jeunes élèves. Le calcul des fonctions symétriques, la détermination numérique des racines d'une équation sont également très soigneusement traités; là, comme d'ailleurs dans tout le cours de l'Ouvrage, les applications pratiques de la théorie se font sur de nombreux exemples.

Quant aux élèves plus avancés, les candidats à l'École Normale, entre autres, ils liront avec fruit le Chapitre relatif aux formes quadratiques, les propriétés de la forme adjointe, la formule de Gauss et ses applications dues à M. Darboux, la théorie des invariants et covariants des formes, toutes questions qui, quoique disparues de la lettre des programmes, s'imposent dans des applications si nombreuses et si intéressantes de la Géométrie analytique. Dans le même ordre d'idées, ils apprendront la résolution de l'équation du 4e degré, basée sur l'existence d'invariants de son premier membre, les principes de la transformation des équations et en particulier de la transformation bilinéaire. Nous leur signalerons encore la démonstration de la transcendance de e, d'après un principe dû à Hurwitz, démonstration d'ordre aussi simple que celle du théorème classique : le nombre e ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients commensurables.

Enfin, les étudiants trouveront développées dans ces *Leçons* les propriétés des séries entières par rapport à une variable et des produits infinis, la théorie des fonctions symétriques des

racines d'un système de deux équations algébriques, généralisation immédiate de la même théorie relative à une seule variable, avec son application à l'élimination de deux inconnues et l'extension du théorème de Bézout à un système de trois équations, questions qui n'ont pas place dans les cours des lycées, et dont cependant les étudiants ont souvent à admettre les résultats pour suivre avec fruit les leçons de leurs maîtres.

Ajoutons à cette énumération incomplète la présence de nombreux exercices dont beaucoup découvrent bien des horizons nouveaux : polynomes de Legendre, nombres de Bernoulli, fonctions de Bessel, intégrales eulériennes, série hypergéométrique de Gauss, fonctions elliptiques et leur propriété d'addition. Et le tout prenant place dans un Volume de 700 pages à peine! Cette simple remarque est peut-être ce qui le recommande le plus éloquemment. A. Tresse.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898; Paris, Gauthier-Villars et fils.

La maison Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1898. — Ce petit Volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que là. Le Volume de cette année contient en outre les Notices suivantes : *Sur la stabilité du système solaire*; par M. H. Poincaré. — *Notice sur l'Œuvre scientifique de M. H. Fizeau;* par M. A. Cornu. — *Sur quelques progrès accomplis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire;* par MM. M. Lœwy et P. Puiseux. — *Sur les travaux exécutés en* 1897 *à l'observatoire du mont Blanc;* par M. J. Janssen. — *Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le* 25 *janvier* 1897; par M. J. Janssen et M. M. Lœwy. In-18 de VI-806 pages, avec 2 Cartes magnétiques : 1fr, 50 (franco 1fr, 85).

Le Rationnel, par *Gaston Milhaud*, agrégé de Mathématiques, docteur ès lettres, chargé de cours de Philosophie à la Faculté des Lettres de Montpellier. (1 vol.

in-12 de la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*, 2fr,50. Félix Alcan, éditeur.)

Cet Ouvrage fait suite à l'*Essai sur la certitude logique*, du même auteur, dont la deuxième édition a récemment paru. Il comprend six études intitulées : *Mathématique et Philosophie, La Science rationnelle, A propos de la Géométrie grecque, Une condition du progrès scientifique, Le raisonnement scientifique et le syllogisme, Sur la notion de limite en Mathématique, Pensée pure et intuition.*

Le but de M. Milhaud, en composant et en réunissant ces études, a été de montrer que, dans une recherche de la connaissance rationnelle, on doit plus tenir compte qu'il n'est fait d'ordinaire d'une activité spontanée de l'esprit, et qu'on ne doit pas craindre d'aller jusqu'à reconnaître à cette activité créatrice quelque degré de contingence et d'indétermination. Il n'a pas la prétention d'apporter un système nouveau, mais il insiste sur le besoin, pour la pensée philosophique que sollicitent de pareils problèmes, d'entrer dans une certaine direction et de ne pas négliger un facteur qui lui semble avoir son importance.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

C. Burali-Forti. — Exercice de traduction en symboles de Logique mathématique (Extrait du *Bull. de Math. elém.*, 1897).

Ev. Galois. — Œuvres mathématiques, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, avec une introduction par M. Em. Picard. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

G. Vailati. — Del concetto di centro di gravità nella statica d'Archimede (Extrait des *R. dell. Acc. r. de Scienze di Torino;* Turin, Clausen, 1897).

Dr Ludwig Goldschmidt. — Die Wahrscheinlichkeitsrechnung : Versuch einer Kritik. Hambourg et Leipzig, L. Voss, 1897.

Nicol. — Cours de Géométrie cotée. Paris, Nony, 1897.

N. Cor et J. Riemann. — Traité d'Algèbre élémentaire. Paris, Nony.

E. Villié. — Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie, données depuis 1869 à la Sorbonne pour la Licence

ès Sciences mathématiques. Énoncés et solutions; 3ᵉ Partie. Compositions données depuis 1889; in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Revue générale des Sciences pures et appliquées; Directeur : L. OLIVIER, Docteur ès Sciences, 9ᵉ année, 1898. Paris, Carré et Naud.

Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION et J. NEUBERG. 2ᵉ série, t. VIII, 1898. Gand, Ad. Hoste, et Paris, Gauthier-Villars et fils.

J. ANDRADE. — Leçons de Mécanique physique; 1 vol. gr. in-8°. Paris, Société d'éditions scientifiques; 1898.

M. D'OCAGNE. — Karl Weierstrass; gr. in-8°, 28 pages (Extrait de la *Revue des questions scientifiques*). Louvain; 1897.

EUG. COSSERAT. — Sur les surfaces qui peuvent, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. — Sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle (Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1897).

L. DESAINT. — Sur quelques points de la théorie des fonctions (thèse); in-4°, 75 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

BERTRAND A.-W. RUSSELL. — An essay on the foundations of Geometry; in-8°, 201 p. Cambridge, University Press; 1897.

E. CESÀRO. — Sur la représentation analytique des régions et des courbes qui les remplissent (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1897).

QUESTIONS.

261. (**1852**, p. 368). — Trouver l'équation de la courbe, laquelle coupe, sous un angle constant, toutes les lignes géodésiques sur une surface développable, issues d'un point fixe sur la surface. (STREBOR).

266. (**1852**, p. 402). — Soient trois axes rectangulaires; on les divise, à partir de l'origine, chacun en parties égales à l'unité; par les points de division d'un axe on mène respectivement des plans parallèles au plan des deux autres axes; ces trois systèmes de plans parallèles déterminent, par leurs intersections, tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers. Soit un point d'intersection ayant pour coor-

données les nombres entiers m, n, p; ce point est le sommet d'un parallélépipède. Prenons, dans l'intérieur de ce parallélépipède, trois points ayant pour coordonnées entières respectives m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3. Le plan qui passe par ces trois points partage le parallélépipède en deux portions; combien chaque portion renferme-t-elle de nombres entiers?

324. (**1856**, p. 229). — Quelles sont les phases de la Terre et les éclipses de Terre pour un spectateur placé dans la Lune?

333. (**1856**, p. 243). — Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et n, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

1787. On considère les points de contact des coniques inscrites à un quadrilatère avec un des côtés du quadrilatère et l'on demande :

1° Le lieu des centres de courbure de ces coniques correspondant aux points de contact;

2° L'enveloppe des cercles osculateurs qui correspondent aux centres de courbure précédents. (C. Tzitzéica.)

1788. On considère, dans un cercle de centre O, un rayon fixe OA et un rayon variable OM. Le point M se projette en P sur OA. Le lieu du centre des symédianes du triangle MOP est une courbe fermée dont l'aire est les $\frac{5}{32}$ de l'aire du cercle donné. (E.-N. Barisien.)

1789. Les cordes communes à l'ellipse et à ses cercles osculateurs, en deux points conjugués, se rencontrent sur une courbe ayant même aire que l'ellipse. (E.-N. Barisien.)

1790. A quelles conditions peut-on trouver sur une quadrique un point P, tel que tout cône ayant pour sommet ce point et pour base une section par un plan quelconque parallèle à une droite donnée, soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit? Ces conditions étant supposées remplies, combien y a-t-il de points P? (R. Gilbert.)

[R4b]

SUR UNE INTÉGRALE D'UN PROBLÈME SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE;

PAR M. M. LAGOUTINSKY.

Les équations différentielles de l'équilibre d'un fil sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}x') + k\mathrm{X} = 0, \\ \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}y') + k\mathrm{Y} = 0, \\ \dfrac{d}{ds}(\mathrm{T}z') + k\mathrm{Z} = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

où X, Y, Z désignent les composantes des forces appliquées au fil, T la tension, k la densité, x, y, z les coordonnées d'un élément du fil, la variable indépendante s l'arc du fil, x', y', z' dérivées des fonctions x, y, z par rapport à s.

Dans ce qui suit, nous supposons que X, Y, Z sont des fonctions des variables x, y, z et s.

Proposons-nous de trouver trois fonctions U, V, W des variables x, y, z, x', y', z' et s, linéaires par rapport à x', y', z', telles que l'expression

$$\mathrm{P} = \mathrm{U}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}x') + \mathrm{V}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}y') + \mathrm{W}\frac{d}{ds}(\mathrm{T}z')$$

multipliée par ds devienne, en vertu de (2), une différentielle exacte, et de déterminer, s'il est nécessaire, les conditions que doivent remplir X, Y, Z pour que l'expression

$$\mathrm{Q} = k\mathrm{XU} + k\mathrm{YV} + k\mathrm{ZW}$$

multipliée par ds soit une différentielle exacte. Alors l'équation

$$\int P\,ds + \int Q s = C$$

donnera une intégrale du système (1) et (2).

La première condition mène à l'équation

$$(3)\qquad \frac{d}{ds}(Ux' + Vy' + Wz') = Ux'' + Vy'' + Wz'',$$

ou, en réduisant,

$$(4)\qquad x'\frac{dU}{ds} + y'\frac{dV}{ds} + z'\frac{dW}{ds} = 0.$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à s, nous aurons

$$(5)\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

En vertu des équations (2) et (5) on peut remplacer cette équation par la suivante

$$(6)\qquad x'\frac{dU}{ds} + y'\frac{dV}{ds} + z'\frac{dW}{ds} - \lambda F - \mu G = 0,$$

où F et G désignent respectivement les premiers membres des équations (2) et (5).

La comparaison des termes renfermant les dérivées secondes des variables x, y, z donne

$$\frac{\partial U}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial W}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial W}{\partial z'} = \mu.$$

On peut donc poser

$$U = \mu x' + f_1,$$
$$V = \mu y' + f_2,$$
$$W = \mu z' + f$$

où μ, f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions des seules variables x, y, z et s. En portant ces valeurs des fonctions U, V, W dans l'équation (6) et comparant les termes semblables, nous obtiendrons, pour la détermination des fonctions μ, f_1, f_2 et f_3, le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0.$$

L'intégration complète de ce système n'introduit pas des fonctions arbitraires en vertu du théorème de M. C. Bourlet (*A. E. N.*, 1891; *Supp.*) et donne pour la solution

$$\begin{aligned}\mu = a_0 &+ a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 s + a_5(x^2 + y^2 + z^2 - s^2) \\ &+ 2a_6 xs + 2a_7 ys + 2a_8 zs,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1 = a_9 &- a_4 x + a_{10} y + a_{11} z - a_1 s - a_6(x^2 - y^2 - z^2 + s^2) \\ &- 2a_7 xy - 2a_8 xz - 2a_5 xs,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2 = a_{12} &- a_{10} x - a_4 y + a_{13} z - a_2 s + a_7(x^2 - y^2 + z^2 - s^2) \\ &- 2a_6 xy - 2a_8 yz - 2a_5 ys,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_3 = a_{14} &- a_{11} x - a_{13} y - a_4 z - a_3 s + a_8(x^2 + y^2 - z^2 - s^2) \\ &- 2a_6 xz - 2a_7 yz - 2a_5 zs,\end{aligned}$$

où a_i sont des constantes arbitraires.

Considérons maintenant l'expression $Q\,ds$, qui devient en vertu de ce qui précède

$$k\mu X\,dx + k\mu Y\,dy + k\mu Z\,dz + (kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z)\,ds$$

On peut donc écrire les conditions cherchées sous

deux formes différentes

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
k\mu \mathrm{X} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
k\mu \mathrm{Y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y},\\
k\mu \mathrm{Z} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z},\\
kf_1\mathrm{X} + kf_2\mathrm{Y} + kf_3\mathrm{Z} &= \frac{\partial\varphi}{\partial s}.
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial(k\mu\mathrm{X})}{\partial y} &= \frac{\partial(k\mu\mathrm{Y})}{\partial x},\\
\frac{\partial(k\mu\mathrm{X})}{\partial z} &= \frac{\partial(k\mu\mathrm{Z})}{\partial x},\\
\frac{\partial(k\mu\mathrm{X})}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1\mathrm{X} + kf_2\mathrm{Y} + kf_3\mathrm{Z})}{\partial x},\\
\frac{\partial(k\mu\mathrm{Y})}{\partial z} &= \frac{\partial(k\mu\mathrm{Z})}{\partial y},\\
\frac{\partial(k\mu\mathrm{Y})}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1\mathrm{X} + kf_2\mathrm{Y} + kf_3\mathrm{Z})}{\partial y},\\
\frac{\partial(k\mu\mathrm{Z})}{\partial s} &= \frac{\partial(kf_1\mathrm{X} + kf_2\mathrm{Y} + kf_3\mathrm{Z})}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

En éliminant les quantités $k\mathrm{X}$, $k\mathrm{Y}$, $k\mathrm{Z}$ entre les équations (7) nous aurons

$$f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

En intégrant cette équation on peut donc trouver l'expression générale des fonctions X, Y, Z, la densité k étant donnée. Si les conditions (7) et (8) sont remplies, nous trouverons, d'après ce qui précède, une intégrale des équations (1) et (2) sous la forme

$$(9)\qquad (f_1x' + f_2y' + f_3z' - \mu)\mathrm{T} + \varphi = \mathrm{C}.$$

Cette intégrale renferme comme cas particuliers beaucoup d'intégrales connues.

Prenons, par exemple, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, $\mu = 1$. Alors d'une part l'équation (9) donne la tension, d'autre part les conditions (8) démontrent qu'il existe une fonction des forces.

Prenons en second lieu $\mu = 0$; nous aurons par conséquent

$$f_1 = a_9 - a_{10}y - a_{11}z,$$
$$f_2 = a_{12} - a_{10}x - a_{13}z,$$
$$f_3 = a_{14} - a_{11}x - a_{13}y,$$

et au lieu de (7) et (8)

$$kf_1 X + kf_2 Y + kf_3 Z = \psi, \tag{10}$$

où ψ est une fonction arbitraire d'une seule variable s.

L'intégrale (9) prendra la forme

$$(f_1 x' + f_2 y' + f_3 z')T + \int \psi \, ds = C. \tag{11}$$

Nous reviendrons de la sorte aux cas indiqués récemment (*N. A.*, 1897; p. 248, III, 2) par M. N. Saltykoff.

On peut, comme conclusion, remarquer que le système des équations (1) et (2) peut avoir deux ou plusieurs intégrales de la forme (9). Comme un exemple de ce fait je puis signaler l'article déjà cité (*N. A.*, 1897; p. 248, III, 1).

[M¹8α] [M²e]

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

NOTE DE LA RÉDACTION. — Les *Nouvelles Annales* ont inséré à diverses époques des notes bibliographiques

rédigées par M. Haton de la Goupillière, de l'Institut, sur les spirales sinusoïdes, qui ont pour équation

$$r^n = \sin n\theta$$

(2e série, t. XV, p. 97), et sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements qui a aussi reçu les noms d'*astroïde* et de *cubo-cycloïde*, et a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(2e série, t. XIV, p. 47, et 2e série, t. XIX, p. 94). Nous recevons du même auteur, sur ces deux mêmes sujets, les indications suivantes, que nous nous empressons de publier comme compléments des précédents articles:

1° *Spirales sinusoïdes*.

Allégret (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX). — Lucas (*Ibidem*, 2e série, t. XVII, p. 240). — Du Chatenet (*Ibidem*, 3e série, t. V, p. 233). — Cesaro (*Ibidem*, 3e série, t. VII, p. 171-190; avril et mai 1888). — Husquin de Rhéville (*Ibidem*, 3e série, t. IX, p. 140). — Cesaro (*Ibidem*, 3e série, t. XIII, p. 103). — Humbert (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 1053). — Fouret (*Ibidem*, t. CVI, p. 342). — Jamet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI, p. 132). — Halphen (*Ibidem*, 19 avril 1876). — Cesaro (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 120). — De Saint-Germain (*Ibidem*, 2e série, t. XIII, p. 263). — Brocard (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. III, p. 231, et t. IV, p. 32). — Fouret (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIe Cahier, p. 25 du Mémoire). — Ribaucour (*Étude des élassoïdes, Académie royale des Sciences de Belgique*, séance du 16 décembre 1880,

p. 219). — Unferdinger (*Archiv der Mathematik und Physik*, t. LI; 1869).

2° Hypocycloïde à quatre rebroussements.

Lez (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 322). — Pomey (*Ibidem*, 3e série, t. V, p. 520). — Cesaro (*Ibidem*, 3e série, t. VII; avril 1888). — Onponale (pseudonyme) (*L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. II, p. 150; avril 1895). — Nester (pseudonyme) (*Ibidem*, t. II, p. 193; mai 1895). — Retali (*Ibidem*, t. III, p. 74; mars 1896). — Maillard (*Ibidem*, t. III, p. 115; mai 1896 et p. 203; septembre 1896). — Barisien (*Ibidem*, t. III, p. 178, août 1896; p. 198, septembre 1896; et p. 292, décembre 1896). — Boutin (*Ibidem*, t. IV, p. 170; août 1897). — Gilbert (*Cours d'Analyse infinitésimale*, 4e édition, p. 183, 440). — Gilbert (*Association française pour l'avancement des Sciences*, p. 101; 1880). — De Longchamps (*Cours de problèmes de Géométrie analytique*, in-8°, t. I, p. 145, 147, 174). — A. Ribaucour (*Étude des élassoïdes*, p. 234). — D'Ocagne (*Coordonnées parallèles et axiales*, p. 47, 90; 1885). — Brocard (*Notes bibliographiques sur les courbes géométriques*, in-8°, autographie, p. 6). — Amstein (*Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles*, t. XVIII, n° 87; 1882). — Federico Amodeo (*Monografia delle curve tautocrone*, p. 29; 1883). — L'astroïde est la courbe représentative de la relation mutuelle des deux courbures de la parabole aux extrémités d'une corde focale

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{\rho'}\right)^{\frac{2}{3}} = \text{const.}$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

Paris.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 9y = e^x(x + a),$$

où a est une constante numérique.

Montrer que, pour une certaine valeur de a, l'intégrale générale de cette équation est une fonction uniforme de x dans tout le plan de la variable complexe x, et calculer explicitement l'intégrale pour cette valeur de a.

II. *Les axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère la famille de sphères*

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0,$$

où a est une constante arbitraire :

1° *Déterminer toutes les surfaces* S *qui coupent orthogonalement chaque sphère* Σ;

2° *Déterminer les lignes de courbure de ces surfaces* S, *et montrer que les lignes de courbure d'une des deux familles sont des cercles.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8}.$$

Analyse supérieure.

Composition écrite. — 1° *On considère la fonction doublement périodique u définie par l'équation différentielle*

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E.$$

Montrer qu'on peut déterminer deux constantes m et p de telle sorte que l'expression

$$e^{\int_{z_1}^{z} dz \int_{z_1}^{z} (mu^2+pu)\,dz}$$

soit une fonction entière *de z. Que devient cette fonction quand on remplace z par $z+\omega$ et par $z+\omega'$, ω et ω' désignant les deux fonctions de u?*

2° *Qu'appelle-t-on intégrale abélienne de première espèce pour une courbe algébrique $f(x, y) = 0$?*

Forme générale de ces intégrales; nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes.

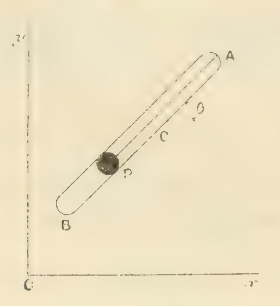
Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un tube rectiligne homogène* AB, *de section infiniment petite de longueur 2a et de masse* M, *est placé sur un plan horizontal, sur lequel il peut glisser sans frottement: dans l'intérieur du tube glisse, sans frottement, un point matériel* P *de masse* M *égale à celle du tube; ce point est attaché à l'une des extrémités* A *du tube par un fil élastique de masse négligeable qui, lorsqu'il n'est pas tendu, a pour longueur naturelle a. On admet que ce fil, lors-*

qu'il est tendu jusqu'en P, possède une tension F proportionnelle à son allongement :

$$F = \lambda^2(\overline{PA} - a) = \lambda^2 . \overline{PC},$$

C désignant le milieu du tube et λ^2 une constante. A l'instant initial, le fil est tendu de telle façon que le



point matériel P soit à l'extrémité B et le système est lancé sur le plan horizontal d'une manière quelconque.

Étudier :

1° *Le mouvement du centre de gravité du système ;*

2° *Le mouvement du système autour du centre de gravité.*

On examinera en particulier le cas où le système est abandonné à lui-même sans vitesses initiales.

On appellera θ l'angle du tube BA avec Ox, et $2r$ l'allongement du fil

$$2r = PA - a = \overline{PC}.$$

Épreuve pratique. — *On donne un prisme droit homogène dont la masse est 1^{gr}, dont la base est un triangle équilatéral de 1^{cm} de côté et dont la hauteur est 2^{cm}. Déterminer la position du centre de gravité du prisme et les éléments de l'ellipsoïde central d'inertie relatif au centre de gravité.*

Mécanique physique.

Épreuve écrite. — 1° *Une parabole roule sans glisser sur une droite. Construire le cercle des inflexions et le cercle des rebroussements pour une position particulière quelconque de la parabole. Construire le rayon de courbure de la trajectoire du foyer et le rayon de courbure de la courbe enveloppée par la directrice de la parabole.*

On pourra s'appuyer sur la propriété suivante de la parabole :

Le rayon de courbure est double du segment de normale compris entre la courbe et la directrice.

2° *Réunir par un train d'engrenage deux arbres parallèles* A *et* B *tournant en sens inverse avec des vitesses de* 323 *tours à la seconde pour* A *et* 234 *tours à la seconde pour* B.

Épreuve pratique. — *Une roue dentée* R *dont la circonférence primitive a* 8^{cm} *de rayon engrène avec une autre roue* R′ *dont la circonférence primitive a un rayon double, soit* 16^{cm}.

Le système adopté est le système dit à flancs. *On demande de construire le profil de l'excédent épicycloïdal d'une dent de la roue* R′, *en admettant que le module de la roue* R *soit égal à* 8.

On ne tiendra pas compte du jeu.

Physique mathématique

Épreuve écrite. — *Equations aux dérivées partielles régissant la vitesse u en fonction des coordonnées transversales y, z, dans l'écoulement uniforme, bien continu, d'un liquide, le long d'un tube fin mouillé par ce liquide. Leur intégration ou approchée.*

ou exacte, pour toute forme donnée de la section normale du tube, au moyen d'une expression de u entière et finie en y, z. Application aux deux cas : 1° d'une section elliptique : 2° d'une section triangulaire équilatérale.

Épreuve pratique. — *Dans le problème constituant l'épreuve écrite, l'expression de la vitesse u à travers une section σ triangulaire équilatérale était*

$$u = \frac{\rho g \mathrm{I}}{\varepsilon} \frac{pp'p''}{p + p' + p''},$$

ρg désignant le poids spécifique du fluide, ε son coefficient de frottement intérieur, I la pente motrice, et p, p', p'' les trois perpendiculaires menées du point intérieur quelconque (y, z) considéré de la section σ, aux trois côtés de celle-ci. Effectuer la quadrature

$$\iint u\,dy\,dz,$$

qui fait connaître le volume fluide débité dans l'unité de temps par l'aire triangulaire

$$\mathrm{T} = \iint dy\,dz.$$

Mécanique céleste.

Épreuve écrite. — *Autour d'un corps central de masse M circule une planète dont la masse m' est finie, mais très petite : l'orbite de cette planète est circulaire et son grand axe est égal à a', de telle façon que ses coordonnées rectangulaires, par rapport à des axes mobiles ayant leur origine en M, soient*

$$x = a' \cos n't, \qquad y = a' \sin n't.$$

Autour de ce même corps central M, et dans le

même plan que la planète troublante, circule une autre planète m. On suppose :

1° *Que la masse de m est infiniment petite ;* 2° *que le grand axe a de la planète troublée est beaucoup plus petit que le grand axe de la planète troublante ;* 3° *que l'excentricité e de la planète troublée est très petite.*

On négligera m'^2, $m'\left(\frac{a}{a'}\right)^3$, $m'e$, e^2 *et l'on calculera les coordonnées rectangulaires de la planète troublée par rapport à des axes mobiles ayant leur origine au corps central* M.

Épreuve pratique. — *On donne l'anomalie moyenne* 24° 16′ 11″ *d'un astre et son excentricité* 0,2, *et l'on demande de calculer son anomalie excentrique.*

Astronomie.

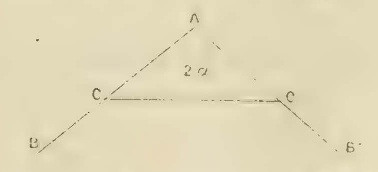
Épreuve pratique. — *La déclinaison du Soleil étant supposée égale à* 18° 27′ 16″, *calculer la distance zénithale de cet astre à* 6ʰ, *temps vrai de Paris.*

Latitude de Paris : 48° 50′ 11″.

Nota : *On fera les calculs avec des logarithmes à* 5 *décimales.*

École Normale (deuxième année).

Mécanique. — *Sur un plan horizontal parfaitement poli, sont placées deux barres homogènes égales* AB



et AB′, *articulées en* A : *la masse de chacune de ces barres est* M *et sa longueur* 2*a. Les milieux* C *et* C′

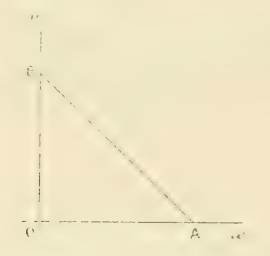
des barres sont attachés l'un à l'autre par un fil élastique dont on néglige la masse et dont la longueur à l'état naturel est a. Les barres étant écartées l'une de l'autre de façon à tendre le fil et à lui donner une longueur r_0 supérieure à a, on abandonne le système à lui-même sans vitesses initiales. *Trouver le mouvement.*

On appellera 2α l'angle BAB' *et r la longueur du fil* CC' *à un instant quelconque t. On admettra que la tension du fil élastique* CC', *quand sa longueur est r, est proportionnelle à son allongement $r - a$ et par suite que l'intensité de cette tension est*

$$M\lambda^2(r - a),$$

λ^2 étant une constante donnée.

Cinématique. — *Un segment de droite* AB *glisse sur*



deux droites rectangulaires Ox, Oy, avec une vitesse angulaire constante.

Trouver le centre des accélérations et construire le centre de courbure de la courbe enveloppée par la droite AB.

Astronomie. — 1° *Déterminer la longitude d'un lieu par une observation de hauteur du Soleil.*

Données :

Latitude de la station	43°18′17″.5
Hauteur du centre du Soleil ...	42°26′13″,4
Déclinaison du Soleil	18°15′27″.5
Heure vraie de Paris	3h 1m 53s.8

La hauteur du Soleil est affranchie de la réfraction et de la parallaxe. L'observation a été faite après le passage au méridien.

2° *Si la hauteur du Soleil est erronée de 30″, quelle sera l'erreur correspondante de la longitude?*

Rennes.

Analyse. — *Quels sont les conoïdes droits pour lesquels la somme des projections, sur l'axe* Oz, *des deux rayons de courbure principaux au point quelconque* M *de la surface, varie proportionnellement au carré de sa distance à l'axe?*

SESSION DE NOVEMBRE 1897. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse.

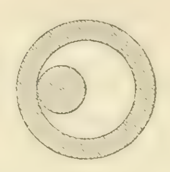
Sur une sphère de rayon un on donne un grand cercle C; P *étant le pôle de ce grand cercle, déterminer une courbe* S *telle que l'arc de* S *compris entre un point fixe* I *de cette courbe et un point variable* M *de la courbe soit égal à l'arc du grand cercle* C *intercepté entre les grands cercles* PI *et* PM. *Calculer l'aire du triangle* PIM *limité par les arcs de grand cercle* PI, PM *et l'arc* IM *de* S.

L'aire demandée s'exprime aisément à l'aide des angles du triangle PIM, elle est H + P — I — M.

MÉCANIQUE.

1° *Deux triangles rigides sans masse* BAD, CAE *sont articulés en leur sommet* A, *leurs sommets* B *et* C *glissent sans frottement sur une horizontale fixe; en* A *est suspendu un poids* P, D *et* E *sont réunis par un fil élastique. On demande la position d'équilibre.*

2° *Dans un plan vertical, un disque creux pesant roule sans glisser par sa surface intérieure sur un*



support circulaire. Chaque point du disque est soumis à un frottement proportionnel à la surface. On demande de déterminer le mouvement.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Dire ce que représente, en coordonnées rectangles, l'équation*

$$x^2 + y^2 - az = 0;$$

montrer que les normales à la surface rencontrent OZ; *volume compris entre la surface et les plans* $z = 0$, $z = a$; *aire de la surface entre les mêmes plans* $\left[\frac{1}{6}\pi a^2(5\sqrt{5} - 1)\right]$.

II. *Mouvement d'un point* M *assujetti à rester sur*

un cercle de centre C, *de rayon* R *et attiré vers un point* O *de la circonférence par une force* $\frac{4mK^2R^2}{\overline{OM}^3}$; *à l'instant initial, l'arc* OM *est un quadrant et la vitesse, égale à* K, *est dans le prolongement de* OM

$$\left(\sin \text{MOC} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{Kt}{2R}}\right).$$

Épreuve pratique. — *La latitude d'un lieu étant supposée égale à la déclinaison d'une étoile, la calculer de telle sorte que, dans le mouvement diurne, l'étoile reste dix-huit heures sidérales au-dessus de l'horizon.*

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Lignes asymptotiques.*

II. *Déterminer les fonctions* φ *et* ψ, *de sorte que* $u = \varphi(x)\psi(y)$ *soit une intégrale de*

$$(1 - x)\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0;$$

particulariser les fonctions de telle sorte qu'on ait

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = -1, \qquad \psi(1) = 0, \qquad \psi'(1) = 1.$$

Substituant u dans (1), on en tire

$$\frac{(1-x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + \psi(y)}{\psi(y)};$$

chaque fraction doit être égale à une constante α

$$\varphi(x) = A(1-x)^{-\alpha}, \qquad \psi(y) = By^{\sqrt{\alpha-1}} + Cy^{-\sqrt{\alpha-1}};$$

avec les données initiales proposées, $\alpha = -1$,

$$\varphi(x) = 1 - x, \qquad \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\log y).$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$y^{VII} - 3y^{VI} + 7y^{V} - 13y^{IV} + 16y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 3x^2 - 1.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — I. *Un angle* BAC, *égal à* 60°, *se déplace sur un plan, de sorte que* AB *passe par un point fixe* O *et que* AC *reste tangente à une développante d'un cercle ayant son centre en* O. *Lieux du centre instantané* I *dans le plan fixe et le plan mobile, cercle des inflexions, lieu de* A *dans le plan fixe, son centre de courbure.*

I décrit un cercle de centre O dans le plan fixe, une parallèle à AB dans le plan mobile ; le lieu de A est une spirale d'Archimède.

II. *Mouvement d'une plaque carrée homogène* ABCD *qui glisse sur un plan fixe,* A *restant sur une droite fixe* OX : *chaque élément* m *est attiré vers* O *par une force* $m\omega^2\overline{Om}$; *pour* $t = 0$, A *est immobile en* O, B *sur* OX *avec une vitesse* $\omega\overline{AB}$. *Pression de* A *sur* OX.

L'équation qui détermine l'abscisse du centre de gravité G et l'équation des forces vives montrent que G décrit uniformément un cercle de centre O ; A y demeure, sa pression sur OX est nulle.

Épreuve pratique. — *Un tétraèdre homogène, de masse égale à* 2O, *est compris entre les trois plans coordonnés rectangulaires et le plan* $\frac{x+y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. *Équation de l'ellipsoïde d'inertie en* O, *moments principaux d'inertie ; direction des axes principaux.*

Le calcul se simplifie et peut offrir quelque intérêt aux étudiants.

Équation de l'ellipsoïde rapporté aux axes donnés

$$26x^2 + 26y^2 + 16z^2 - 12yz - 12zx - 8xy = 1.$$

Moments principaux : 30, 28, 10.

Cosinus directeurs des axes correspondants :

1°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$,	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$,	0;
2°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$,	$\frac{1}{\sqrt{3}}$,	$\frac{1}{\sqrt{3}}$;
3°	$\frac{1}{\sqrt{6}}$,	$\frac{1}{\sqrt{6}}$,	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Intégrer les équations différentielles totales*

$$\frac{du}{dx} = mx + ny + pu, \qquad \frac{du}{dy} = \mu x + \nu y + \varpi u,$$

où $m, \ldots, \varpi$ *représentent des constantes quelconques.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un cylindre de révolution homogène pesant peut tourner autour de son axe qui est vertical. Ce cylindre est creusé d'un canal infiniment étroit, dont l'axe curviligne est une hélice dont le pas est la hauteur du cylindre et dont le rayon est celui du cylindre.*

Une bille pesante est abandonnée sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure du tube. Le cylindre est lui-même abandonné sans vitesse initiale.

On demande le mouvement du système.

On appliquera les théorèmes du mouvement des systèmes.

Épreuve pratique. — *Calculer les moments principaux d'inertie d'un cube homogène relatifs à un de ses sommets. Le côté du cube est de* 1^m.

Astronomie.

Épreuve pratique. — *En un lieu dont la latitude est* $8°58'53''$, *on donne la distance zénithale d'une certaine étoile* $69°42'30''$ *et son azimut* $300°10'30''$.

On demande de calculer la déclinaison et l'angle horaire de cette étoile au même instant.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Trouver les trajectoires orthogonales des tangentes à une chaînette de paramètre a.*

II. *On considère celle des trajectoires précédentes qui passe par le sommet de la chaînette : c'est la tractrice. Montrer qu'elle satisfait à l'équation*

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

et calculer la longueur de sa tangente limitée au point de contact et à l'axe des x. Équation de la tractrice.

III. *Calculer le produit des rayons principaux de courbure pour un point quelconque de la surface engendrée par la rotation de la tractrice autour de son asymptote.*

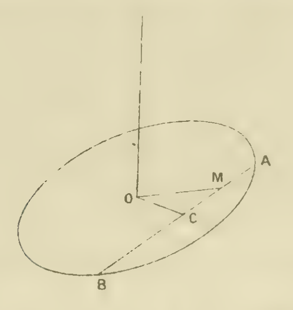
Épreuve pratique. — *Développer suivant les puissances entières positives et croissantes de x la fonction*

$$y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}.$$

Valeurs de x, réelles ou imaginaires, pour lesquelles le développement est convergent.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un disque circulaire homogène peut tourner librement autour de son axe Oz qui est vertical et fixe. Dans une section droite O et suivant*



une corde AB, égale au côté du triangle équilatéral inscrit, est creusé un canal à section infiniment petite, dans lequel peut glisser sans frottement un point matériel M, de masse m, attiré vers le point O par une force $R = -m\mu\rho$, proportionnelle à la distance à ce point.

On demande le mouvement du système.

Données initiales : Au début, le disque a une vitesse angulaire donnée ω et le point M est placé en A, à une des extrémités du tube, sans vitesse relative dans le système. De plus, en appelant M la masse du disque, on a $m = \frac{M}{2}$. On examinera les deux cas particuliers

suivants :

$$\mu = \frac{8}{5}\omega^2, \qquad \mu = 8\omega^2.$$

Si OC est la perpendiculaire menée sur le milieu de AB, la position du système sera déterminée par la connaissance de l'angle θ, formé par OC avec un axe horizontal fixe passant par O et la distance $\mathrm{CM} = r$ de M à C. Deux équations suffiront donc, et ces deux équations seront fournies immédiatement par le théorème des forces vives et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Oz, appliqués au système total. Nous pouvons remarquer que le système peut être supposé pesant ou non pesant sans que ces équations soient modifiées ; il n'y aura de changement que pour les expressions des pressions supportées par l'axe et des réactions mutuelles du disque et du point M. Les axes étant Oz et deux droites fixes rectangulaires dans le plan horizontal de O, si a est le rayon du disque, sa force vive sera $\mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta'^2$, la somme des moments des quantités de mouvement de tous ses éléments $\mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta'$; pour le point M, nous aurons les formules

$$x = \frac{a}{2}\cos\theta - r\sin\theta,$$

$$y = \frac{a}{2}\sin\theta + r\cos\theta,$$

d'où l'on déduit aisément

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right)^2 + r^2\theta'^2,$$

$$xy' - yx' = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right) + r^2\theta'.$$

et nous aurons les deux équations

$$(1)\quad \mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta'^2 + m\left[\left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right)^2 + r^2\theta'^2\right] = -\, m\mu\left(\frac{a^2}{4} - r^2\right) + h,$$

$$(2)\quad \mathrm{M}\frac{a^2}{2}\theta' + m\left[\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\theta' + r'\right) + r^2\theta'\right] = k,$$

h et k étant deux constantes.

Ces deux équations se ramènent immédiatement à des quadratures, et l'on trouve les formules

$$(3)\quad \begin{cases} m\left(\mathrm{M}\frac{a^2}{2} + mr^2\right)r'^2 = \left(\mathrm{M}\frac{a^2}{2} + m\frac{a^2}{4} + mr^2\right) \\ \qquad\qquad \times\left[h - m\mu\left(\frac{a^2}{4} + r^2\right)\right] - k^2. \end{cases}$$

$$(4)\quad \theta' = \frac{k - m\frac{a}{2}r'}{\mathrm{M}\frac{a^2}{2} + m\frac{a^2}{4} + mr^2}.$$

La première se ramène à une quadrature elliptique. Dans les deux cas particuliers indiqués, l'intégration peut se faire.

Si l'on pose

$$f(r^2) = \left(\mathrm{M}\frac{a^2}{2} + m\frac{a^2}{4} + mr^2\right)\left[\left(h - m\mu\left(\frac{a^2}{4} - r^2\right)\right)\right] - k^2,$$

les hypothèses $m = \frac{\mathrm{M}}{2}$, $(r')_0 = 0$, $(\theta')_0 = \omega$ donnent

$$f(r^2) = \left(3\frac{a^2}{4} - r^2\right)\left[\mu r^2 - \left(\frac{5}{4}\mu - 2\omega^2\right)a^2\right].$$

Si $\frac{5}{4}\mu - 2\omega^2 > 0$, le mouvement est oscillatoire et M va de A à B, puis revient de B à A, etc. dans des temps égaux.

Si $\frac{5}{4}\mu - 2\omega^2 < 0$, deux cas se présentent :

Si $\dfrac{2\omega^2 - \frac{5}{4}\mu}{\mu} < \dfrac{3}{4}$, ou $\omega^2 < \mu$, l'oscillation se produit entre A et un point A′ compris entre C et A ; si $\omega^2 = \mu$, A est en équilibre relatif ; si $\omega^2 > \mu$, le point quitte le canal.

Si $\mu = \dfrac{8}{5}\omega^2$, la position A′ vient en C, mais le mouvement n'est plus oscillatoire, M n'arrivant en C qu'après un temps infini. On peut du reste intégrer dans ce cas.

Enfin, si $\mu = 8\omega^2$, on aura

$$f(r^2) = \mu(a^2 + r^2)\left(3\frac{a^2}{4} - r^2\right),$$

on peut diviser les deux membres de l'égalité qui donne r^2 par $a^2 + r^2$ et il vient, en posant $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

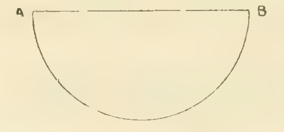
$$\sqrt{\mu}\, dt = -\frac{dr}{\sqrt{b^2 - r^2}},$$

d'où

$$r = b\cos t\sqrt{\mu},$$

et tout se passe dans le mouvement relatif comme si M était attiré par C proportionnellement à la distance.

Épreuve pratique. — *On suppose que dans un demi-cercle matériel, limité par le diamètre* AB, *le poids*



spécifique en chaque point est proportionnel à la distance du point à AB. *On demande :*

1° *Le centre de gravité de la plaque ;*

2° *La longueur du pendule simple synchrone du pendule composé, que l'on obtiendrait en faisant*

tourner un demi-cercle égal au premier, mais supposé homogène autour de AB, supposé horizontal et fixe.

On vérifiera que cette dernière longueur est la distance à AB du centre de gravité de la plaque non homogène.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Les éléments d'une planète étant connus, exposer la suite des calculs qui permettent de déterminer ses coordonnées apparentes, ascension droite et déclinaison, pour une époque donnée.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'anomalie excentrique qui correspond à une anomalie moyenne*

$$m = 332°28'54'',77,$$

dans une orbite dont l'excentricité est donnée par

$$\log e = \bar{1},3897262.$$

Emploi de l'équation de Kepler.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

1° *Étude de l'intégrale hyperelliptique*

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_q)}};$$

périodes, points singuliers, fonction inverse.

2° *Intégrer l'équation*

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 1 - axy + ax^2y^2 = 0.$$

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Un tube rectiligne AB, *homogène, pesant, de masse* M *et de section négligeable, est assujetti à se mouvoir sans frottement dans un plan vertical, autour de son centre de gravité* O. *Un point matériel pesant* M, *de masse m' comparable à m, se meut en même temps, sans frottement, dans le tube* AB :

1° *Former les équations différentielles du mouvement du système, en prenant pour variables la longueur* $OM = \lambda$, *et l'angle* $AOx = \theta$ *du tube* AB *avec l'horizontale* Ox ;

2° *Étudier approximativement les petites oscillations. On supposera que* θ *et* λ *sont nuls à l'instant initial, et l'on choisira les vitesses initiales* θ'_0 *et* λ'_0, *supposées toutes deux très petites, de manière que, pendant un certain temps, le tube et le point matériel se retrouvent très sensiblement, après chaque oscillation, dans les mêmes positions respectives qu'à l'instant initial.*

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Avant-projet d'une machine à vapeur, à un cylindre, à double effet, à détente et à condensation, avec distribution par tiroir simple à recouvrements :*

1° *Diagramme pratique. Connaissant la pression au générateur, le nombre de tours, le degré de détente et les diverses avances, on déterminera, en tenant compte de l'espace mort et des pertes de charge à l'admission, les dimensions du cylindre, de façon que la machine ait une puissance de 25 chevaux.*

2° *Épure de distribution. Connaissant le rayon de l'excentrique, on déterminera les recouvrements de*

manière à réaliser les conditions imposées par le diagramme.

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu de colatitude γ, trouver l'ascension droite x du point de l'équateur qui se lève en même temps qu'une étoile connue (dont α et Δ sont l'ascension droite et la distance polaire), et la différence y d'azimut entre ce point et l'étoile.*

Applications :

$$\gamma = 39^{\circ}21'16'',0, \qquad \alpha = 5^{h}9^{m}35^{s},23, \qquad \Delta = 108^{\circ}19'15'',1.$$

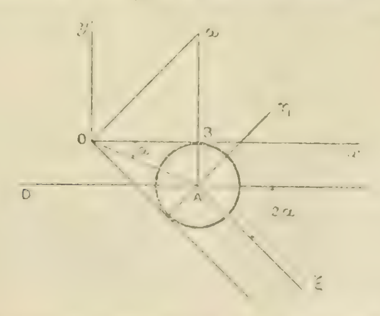
Lyon.

MÉCANIQUE.

I. *Une barre pesante, homogène, sans épaisseur, tourne librement autour d'un de ses points fixes. On demande : 1° de poser les équations différentielles du mouvement; 2° de déterminer les conditions initiales de façon que la barre décrive un cône de révolution à axe vertical; 3° de calculer la réaction du point fixe.*

Appliquer les théorèmes : 1° des forces vives; 2° des aires en projection sur un plan horizontal.

II. *Un cercle de rayon* R *et une tangente liée au*



cercle se meuvent ainsi qu'il suit : 1° le centre décrit

une droite fixe D; 2° *la tangente passe par un point fixe* O, *situé à une distance* R *de* D. *Construire les deux roulettes fixe et mobile.*

$$OB = m,$$

$$\widehat{\omega OB} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

$$\lambda = \tang \alpha.$$

Considérons les axes fixes xOy et les axes mobiles $\xi A \eta$ entraînés dans le mouvement. Les formules du changement des coordonnées rectangulaires sont

$$(o)\quad \begin{cases} \xi = (x - m)\cos 2\alpha - (y + R)\sin 2\alpha, \\ \eta = (x - m)\sin 2\alpha + (y + R)\cos 2\alpha. \end{cases}$$

Les coordonnées (dans le système xOy) du centre instantané ω sont

$$X = m; \qquad Y = m \cot 2\alpha;$$

avec

$$m = R \cot \alpha,$$

d'où

$$X = \frac{R}{\lambda}, \qquad Y = \frac{R(1 - \lambda^2)}{2\lambda^2},$$

$$X^2 = 2R\left(y + \frac{1}{2}R\right).$$

La roulette fixe est cette parabole (axe Oy; foyer en O; paramètre égal à R).

Remplaçons dans les formules (o) x et y par X et Y; il viendra

$$\xi = -\frac{R}{\lambda}, \qquad \eta = \frac{R(1 - \lambda^2)}{2\lambda^2},$$

$$\xi^2 = 2R\left(\eta + \frac{1}{2}R\right). \text{ (Roulette mobile.)}$$

Le mouvement est donc produit par une parabole qui roule sur une parabole fixe égale. Le lecteur achèvera la discussion géométrique assez intéressante.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1897 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes Ox et Oy faisant un angle θ, et sur l'axe des y un point P ($OP = p$) et un point B ($OB = b$). Par P l'on mène une parallèle à Ox, sur laquelle on prend des distances variables $P\mu = d$, $P\mu' = d'$, telles que $dd' = k^2$. Enfin, on considère une droite (D), $y = mx + b$. Faisant varier m :

1° Démontrer que si le point de rencontre M des droites (D) et $O\mu$ décrit une conique (C), $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0$, le point de rencontre M' des droites (D) et $O\mu'$ décrit de même une conique.

2° Chercher la condition qui lie p, b et k pour que cette dernière conique se confonde avec la conique (C), et démontrer que, cette condition étant satisfaite, il y a toujours une position de (D) telle que la corde interceptée sur cette droite par la conique (C) soit vue du point O sous un angle droit.

3° Les points P et B étant supposés sur une droite OPB mobile autour du point O, chercher, pour des valeurs données de p et de k, le lieu du point B tel que, pour chaque position de ce point, les points M et M' décrivent la conique (C). Le lieu sera rapporté aux axes Ox et Oy donnés.

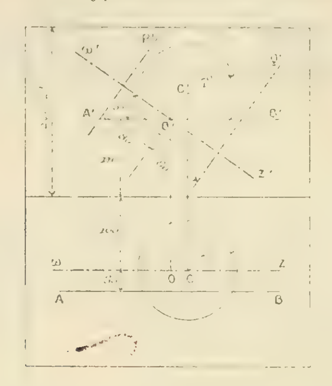
4° Enfin, trouver la position de B et la relation entre p et k telles que toutes les cordes interceptées par la conique (C) sur la droite (D) mobile soient vues sous un angle droit du point O.

Épure. — Intersection d'un hyperboloïde et d'une sphère.

On demande de déterminer l'intersection d'un hyperboloïde de révolution avec une sphère. Les deux surfaces sont définies de la façon suivante :

I. L'hyperboloïde a son axe (ωz, $\omega' z'$) de front et incliné de 35° sur le plan horizontal. Son centre (O, O') (cote 110^{mm}, éloignement 100^{mm}). La génératrice (AB, A'B') parallèle à la

ligne de terre définit la surface (cote de cette génératrice 110^{mm}, éloignement 130^{mm}); l'hyperboloïde est limité à deux plans P'



et Q' perpendiculaires à son axe, symétriquement placés par rapport à son centre et à une distance de 80^{mm} de ce centre.

II. Le centre de la sphère (C, C') est situé sur le diamètre de front du cercle de gorge de l'hyperboloïde et à une distance $O'C' = 50^{mm}$ du centre (O, O') de cet hyperboloïde. Le rayon de cette sphère est d 70^{mm}.

On représentera l'hyperboloïde limité, ainsi qu'il a été dit, en enlevant la portion de la surface comprise dans la sphère. On aura soin d'indiquer la construction rigoureuse des contours apparents de cette surface en faisant ressortir les particularités de ces courbes.

Cadre de 27^{cm} sur 45^{cm}.

Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 240^{mm} du côté supérieur. Projetante OO' au milieu de la feuille de l'épure.

Calcul trigonométrique.

Dans le triangle ABC on donne la surface S, la médiane m relative au côté BC et l'un des angles α que font entre elles les deux autres médianes :

1° Calculer la longueur a du côté BC,

$$S = 853^{a},54, \qquad m = 715^{m},63, \qquad \alpha = 121^{\circ}27'35'',$$

en se bornant à la plus petite valeur de cette inconnue.

2° Établir les formules pour le calcul des deux autres médianes et donner les conditions de possibilité du problème, ainsi que le nombre des solutions.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 41 [1].

(1842, p. 306.)

Un géomètre anglais vient de démontrer que toute équation du cinquième degré peut se réduire à la forme

$$x^5 + x - a = 0.$$

NOTE

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

La méthode dont il s'agit est aujourd'hui devenue classique, sous le nom de *théorème de Jerrard*. Elle procède de celle de Tschirnaüs, pour la disparition de certains termes d'une équation. On en trouve notamment un exposé très clair dans la *Théorie des équations algébriques* de M. Petersen (traduction française, 1897, p. 83-85). On établit ainsi, pour le cas du 5e degré, que l'équation générale peut être ramenée à la résolution d'une autre équation de la forme $x^5 + px + q = 0$,

(1) Nous commençons aujourd'hui la revision de certaines questions anciennes qui n'ont pas été resolues jusqu'ici dans les *Nouvelles Annales*, et qu'il convient de faire disparaître de la liste des questions sans solution ; les unes, comme la question **41**, par exemple, sont devenues classiques ; d'autres sont insolubles dans l'état présent de la Science, comme la suivante (question **48**). Quant aux problèmes abordables, et pas encore résolus, nous nous réservons de les rappeler successivement, comme nous avons déjà commencé à le faire, en tête des *questions proposées* dans les divers numéros, et en ayant soin d'en indiquer l'origine première. Ce seront encore, à l'heure actuelle et même après plus d'un demi-siècle, des exercices utiles et intéressants. (*Note de la Rédaction.*)

qui, par le changement de x en λx, conduit immédiatement à celle de l'énoncé. Pour arriver à ce résultat, il n'est besoin que de résoudre des équations du troisième degré.

Question 48.

(1842, p. 520.)

Deux nombres consécutifs, autres que 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes.* (CATALAN.)

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT, rédacteur.

Ce théorème a été souvent réédité depuis 1842; il fait partie de la série des propositions que Catalan appelait des *théorèmes empiriques*. Dans l'état présent de l'avancement de la Théorie des nombres, la démonstration semble impossible à obtenir. Lionnet, qui s'intéressait au plus haut point aux questions d'Arithmologie, m'a même déclaré plusieurs fois qu'il inclinait à croire la proposition fausse, bien que personne ne fût parvenu à la mettre en défaut par un exemple numérique. Cette opinion ne dérivait d'ailleurs que du sentiment et aussi d'un certain instinct des probabilités, que Lionnet apportait volontiers dans ces sortes de questions, mais qui est, on doit l'avouer, bien trompeur en de telles matières.

En somme, cette question, comme le théorème de Goldbach, comme celui de Fermat et comme plusieurs autres, doit être rangée parmi les desiderata de la Théorie des nombres, et ce n'est pas probablement le XIXe siècle qui en verra la solution.

Question 156.

(1847, p. 243.)

Par un point M *d'une conique on mène les cordes* MA, MB, MC, ...; *par les points* A, B, C, ..., *on mène des droites respectivement conjuguées aux droites* MA, MB, MC, ...; *toutes ces droites concourent en un même point situé sur la conique.* (PAUL SERRET.)

NOTE

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

La propriété est évidente pour la circonférence et s'étend par projection à toutes les coniques. L'extrême simplicité d'une telle question semble seule expliquer qu'aucune solution n'ait été publiée. Directement, on voit aussi que les droites conjuguées, cordes supplémentaires de MA, MB, ..., concourent au point M' diamétralement opposé à M.

Question 176.

(1848, p. 45.)

Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs d'hyperboles équilatères ayant le même centre, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera une ellipse de Cassini. (Strebor.)

SOLUTION

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

On sait et l'on vérifie immédiatement que si $OD = f(t)$ est l'équipollence d'une droite, $OH = \sqrt{OD}$ est l'équipollence d'une hyperbole équilatère, dont le centre est l'origine ; et que si $OC = \varphi(t)$ est l'équipollence d'une circonférence, $OE = \sqrt{OC}$ est celle d'une ellipse de Cassini. Ceci posé, soient P, Q les extrémités de la base du triangle curviligne, R le sommet variable. Prenant le point O, centre des hyperboles, pour origine, effectuons sur la figure la transformation représentée par $OM' = \overline{OM}^2$. Les arcs d'hyperboles PR, QR se transforment en deux droites P'R', Q'R' ; et comme la transformation est isogonale, l'angle en R' est égal à l'angle en R, c'est-à-dire constant. Le lieu de R' est donc une circonférence, et, en effectuant la transformation inverse $OR = \sqrt{OR'}$, nous aurons pour lieu de R' une ellipse de Cassini.

Remarque. — Ce mode de démonstration permet d'établir

une foule de propositions, corrélatives de celles qui ont trait à la ligne droite. Par exemple :

1° Dans le triangle curviligne de l'énoncé, la somme des trois angles est de deux droits ;

2° Toute trajectoire orthogonale d'arcs d'hyperboles équilatères issus d'un même point et ayant un centre commun est une ellipse de Cassini.

Question 187.

(1848, p. 240; 1898, 99.)

Deux côtés d'un angle droit touchent deux coniques confocales situées dans le même plan; le lieu du sommet est un cercle; la droite qui réunit les deux points de contact a pour enveloppe une conique. (CHASLES.)

SOLUTION

Par M. DONON, élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

I. Supposons les deux coniques rapportées à leurs axes; nous pouvons prendre leurs équations sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha + \lambda} + \frac{y^2}{\beta + \lambda} - 1 = 0.$$

Une tangente à la conique (1) de coefficient angulaire m a pour équation

$$(3) \qquad y = mx + \sqrt{\alpha m^2 + \beta};$$

une tangente à la conique (2) perpendiculaire à la précédente a pour équation

$$(4) \qquad my = -x + \sqrt{\alpha + \beta m^2 + \lambda(1 + m^2)}.$$

De sorte qu'un point du lieu est défini par les équations (3) et (4). Pour faire l'élimination de m entre ces deux équations écrivons-les

$$y - mx = \sqrt{\alpha m^2 + \beta},$$

$$my + x = \sqrt{\alpha + \beta m^2 + \lambda(1 + m^2)}.$$

puis faisons la somme des carrés, ce qui donne

$$(x^2+y^2)(1+m^2) = (\alpha+\beta-\lambda)(1+m^2).$$

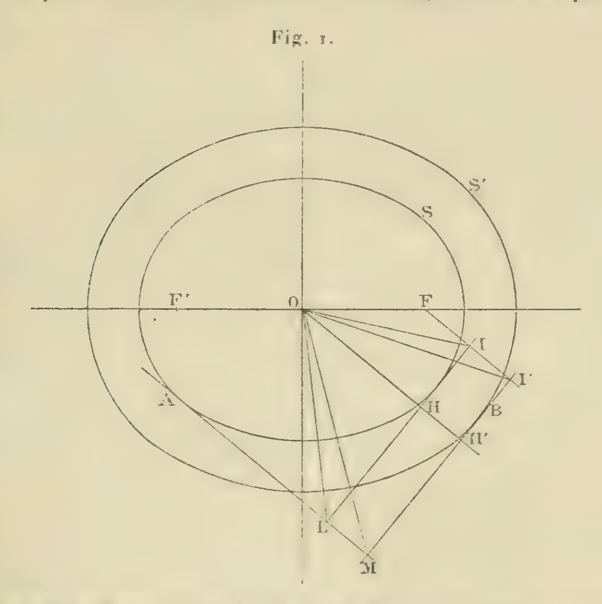
Supprimons le facteur $1+m^2$ qui correspond évidemment aux droites isotropes issues des foyers communs; il reste alors le lieu demandé

$$x^2+y^2 = \alpha+\beta+\lambda;$$

c'est donc une circonférence concentrique aux ellipses données.

Solution géométrique. — Soient S et S' les deux coniques, M un point du lieu. Considérons une tangente HL à S parallèle à BM.

Fig. 1.



lèle à BM. Montrons d'abord que si l'on mène OH' perpendiculaire sur BM, on a

$$OH'^2 - OH^2 = \lambda.$$

Pour cela, menons FI' perpendiculaire sur BM. Dans le triangle rectangle OH'I' on a

$$OH'^2 = OI'^2 - H'I'^2 = \alpha+\lambda-H'I'^2;$$

le triangle OHI donne, de même,

$$OH^2 = OI^2 - HI^2 = \alpha - HI^2;$$

en retranchant membre à membre et en tenant compte de ce que $H'I' = HI$, on obtient

$$OH'^2 - OH^2 = \lambda.$$

Ceci posé, cherchons à évaluer OM. On a, dans le triangle rectangle OMH',

$$OM^2 = OH'^2 + MH'^2 = OH'^2 + LH^2.$$

Mais le triangle OHL donne

$$LH^2 = OL^2 - OH^2 = \alpha + \beta - OH^2;$$

on en déduit

$$OM^2 = OH'^2 - OH^2 + \alpha + \beta = \alpha + \beta + \lambda.$$

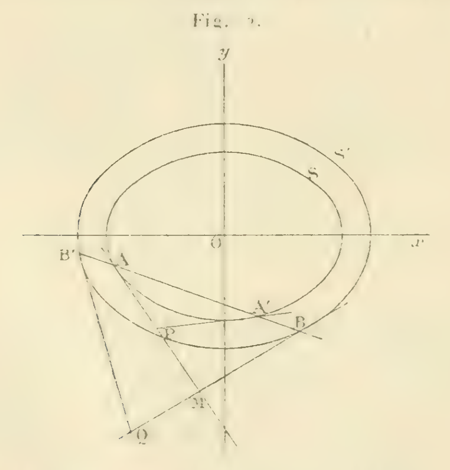
Donc le lieu du point M est une circonférence dont le carré du rayon est égal à $\alpha + \beta + \lambda$.

II. Cherchons l'enveloppe de la droite AB. Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite AB. Soient P le pôle de AB par rapport

Fig. 2.



à la conique S et Q le pôle de AB par rapport à la conique S'. Si AB est l'une des droites dont on cherche l'enveloppe, l'une des

tangentes menées de P à la conique S doit être perpendiculaire à l'une des tangentes menées de Q à la conique S'. Si donc on forme d'une part l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de P à la conique S, d'autre part l'équation aux coefficients angulaires des perpendiculaires aux tangentes menées de Q à la conique S', ces deux équations devront avoir une solution commune.

Or les coordonnées du point P sont $\frac{-\alpha u}{w}$, $\frac{-\beta v}{w}$, donc l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de P à la conique S est

$$\left(\frac{-\beta v}{w} + m\frac{\alpha u}{w}\right)^2 = \alpha m^2 + \beta,$$

$$(5)\qquad \alpha m^2(\alpha u^2 - w^2) - 2\alpha\beta uvm + \beta(\beta v^2 - w^2) = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites QB, QB' sera de même, en posant $\alpha' = \alpha + \lambda$, $\beta' = \beta + \lambda$,

$$\alpha' m^2(\alpha' u^2 - w^2) - 2\alpha'\beta' uvm + \beta'(\beta' v^2 - w^2) = 0.$$

Donc l'équation aux coefficients angulaires des perpendiculaires à ces droites sera

$$(6)\qquad \beta' m^2(\beta' v^2 - w^2) + 2\alpha'\beta' uvm + \alpha'(\alpha' u^2 - w^2) = 0.$$

Nous aurons donc l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant m entre les équations (5) et (6).

Éliminons le terme en m entre les équations (5) et (6); pour cela multiplions la première équation par $\alpha'\beta'$, la deuxième par $\alpha\beta$ et ajoutons membre à membre. On obtient

$$\begin{aligned} &m^2\alpha\beta'[\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - w^2(\alpha' + \beta)] \\ &+ \alpha'\beta[\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - w^2(\alpha + \beta')] = 0, \end{aligned}$$

mais on a $\alpha' + \beta = \alpha + \beta' = \alpha + \beta + \lambda$; donc l'équation précédente nous donne

$$\alpha\alpha' u^2 + \beta\beta' v^2 - (\alpha + \beta + \lambda)w^2 = 0:$$

c'est l'équation cherchée. Elle représente une conique rapportée à ses axes. Si l'on fait la différence des carrés des longueurs des derniers axes, on trouve, en posant $\alpha - \beta = c^2$,

$$\frac{\alpha(\alpha+\lambda) - \beta(\beta+\lambda)}{\alpha+\beta+\lambda} = \frac{c^2(\alpha+\beta) + \lambda c^2}{\alpha+\beta+\lambda} = c^2;$$

donc la conique trouvée est une conique homofocale aux deux coniques données.

Autres solutions de MM. Audibert et E.-N. Barisien.

M. E. Bally nous fait remarquer qu'il a résolu et généralisé la question dans un article : *Notes de Géométrie relatives à un théorème de Chasles*, publié dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (mai 1897).

Question 199.

(1849, p. 44.)

Expliquer *clairement* ce qu'il faut entendre par *tétraèdres semblablement situés* dans la théorie des polyèdres semblables.

NOTE

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

Sans vouloir pénétrer le fond de la pensée de l'auteur de la question, à près de cinquante années de distance, il nous paraît tout simple de répondre à son désir. Si deux polyèdres (P), (P′) sont semblables et ont pour rapport de similitude α, il suffit de transformer (P) en prenant un centre d'homothétie quelconque, et le rapport d'homothétie α, pour obtenir un polyèdre (P_1) superposable à (P′). Si, dans ces deux derniers polyèdres, (T_1) et (T′) sont deux tétraèdres correspondants, c'est-à-dire superposables lorsque (P_1) se superpose à (P′), et si en effectuant la transformation homothétique inverse (T) est le tétraèdre transformé de (T_1), alors (T) et (T′) seront deux tétraèdres homologues, et semblablement situés par rapport aux tétraèdres voisins.

La difficulté est plus grande peut-être dans le plan, parce que l'on confond à tort en général deux modes de similitude différents : dans la similitude directe, si le rapport de similitude devient égal à l'unité, la superposition des figures est possible, *par simple glissement dans le plan :* dans la similitude symétrique, la superposition ne peut s'effectuer que *par un retournement* de la figure, c'est-à-dire en sortant du plan.

Comme dans l'espace ce retournement est impossible, on ne dit pas que deux polyèdres sont égaux quand par une translation ils peuvent être rendus symétriques; ni qu'ils sont semblables lorsque, par une transformation homothétique et une

translation, ils peuvent aussi être rendus symétriques. C'est peut-être un tort; la distinction de l'égalité directe et de l'égalité symétrique, de la similitude directe et de la similitude symétrique serait de nature à éclaircir beaucoup le langage et les idées.

Question 243.

(1851, p. 318.)

Soit l'équation

$$(x - a_1)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_8)(x - a_9)\ldots(x - a_{4n})$$
$$- b^m(x - a_2)(x - a_3)(x - a_6)(x - a_7)\ldots(x - a_{4n-1}) = 0;$$

les indices augmentent successivement d'une unité et de trois unités; les différences $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $\ldots$, $a_{4n-1} - a_{4n}$ *sont positives; b est un nombre positif; m est un nombre entier positif; les* $2n$ *racines sont réelles et comprises entre* a_1 *et* a_2, a_3 *et* a_4, $\ldots$, a_{4n-1} *et* a_{4n}. (Richelot.)

SOLUTION

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

Les lettres a comprises dans les deux termes sont respectivement

$$\begin{array}{cccccc} a_1 \quad & a_4\,a_5 \quad & a_8\,a_9 \quad \ldots \quad & a_{4n-4}\,a_{4n-3} & & a_{4n} \\ & a_2\,a_3 \quad & a_6\,a_7 \quad \ldots & & a_{4n-2}\,a_{4n-1} & \end{array}$$

En substituant à x la valeur a_{4p} le premier terme s'annule; le deuxième contient un nombre pair de facteurs négatifs; donc $f(a_{4p}) > 0$, en appelant $f(x)$ le premier membre de l'équation.

En substituant a_{4p+1}, les mêmes faits se produisent;

$$f(a_{4p+1}) > 0.$$

En substituant a_{4p+2}, le nombre des facteurs négatifs du premier terme est impair; le deuxième est nul; donc

$$f(a_{4p+2}) < 0.$$

En substituant a_{4p+3}, les mêmes faits se produisent;

$$f(a_{4p+3}) < 0.$$

Enfin $f(a_{4p+4})$ a le même signe que a_{4p}, ou

$$f(a_{4p+4}) > 0.$$

La proposition est donc établie. On aurait pu remplacer b^m par un nombre positif quelconque. Il semble que l'énoncé ait été compliqué comme à plaisir.

Question 341.

(1856, p. 353.)

Soient AB, A'B', A''B'', ... *un système de forces en équilibre dans un plan.* A, A', A'', ... *sont les points d'application;* AB, A'B', ... *représentent les intensités et les directions des forces; par un point quelconque* M *du plan, soient menées aux droites* AB, A'B', A''B'', ... *des droites* ME, ME', ME'', ... *sous un angle constant* α; *de telle sorte qu'en faisant tourner une de ces droites* ME' *autour de* M *jusqu'à ce qu'elle coïncide avec* ME, *alors* A'B' *devienne parallèle à* AB, ...; *la somme des produits*

$$AB.EA + A'B'.E'A' + A''B''.E''A'' + \ldots$$

est constante quelles que soient la position du point M *et la grandeur de l'angle* α, *et selon que cette somme est positive, nulle ou négative, l'équilibre est stable, permanent ou instable.* (Möbius).

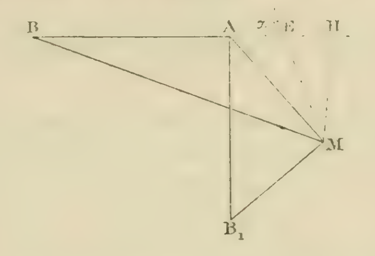
SOLUTION

Par M. C.-A. Laisant, rédacteur.

Rappelons d'abord qu'un système de forces *quelconques* dans un plan étant donné, il existe sur ce plan un centre G des forces, et qui est tel que si toutes les forces tournent d'un même angle dans le même sens autour de leurs points d'application, la résultante, appliquée en G, tourne dans le même sens et du même angle autour de G. D'après cela, si un système de forces est en équilibre, et si on les divise en deux groupes, chacun d'eux ayant pour centre G_1, G_2 respectivement, le système se réduira à deux forces égales et opposées R_1, R_2 appliquées en G_1, G_2. Suivant que ces forces, si l'on considère G_1G_2 comme une barre rigide ten-

dront à l'allonger, ou à la comprimer, l'équilibre sera stable ou instable. Cela revient à dire que, si l'on fait tourner les forces d'un angle droit dans le sens positif, le couple ainsi obtenu sera positif ou négatif suivant que l'équilibre sera stable ou instable. S'il était permanent, les deux points G_1, G_2 coïncideraient.

Cela posé, revenons à l'énoncé, et considérons une des forces AB; soient ME la droite qui fait avec elle l'angle α,



$MH = h$ la perpendiculaire abaissée de M sur AB, et posons $HA = a$. On a

$$EA = HA - HE = a - h\cot\alpha, \qquad EA, AB = (a - h\cot\alpha)AB.$$

Or $h.AB = 2(MAB)$, $a.AB = 2\,OAB_1$, AB_1 étant la nouvelle position de AB après une rotation positive d'un angle droit autour de A. Il est facile de reconnaître que ces relations sont vraies en grandeurs et en signes.

La somme cherchée $\Sigma(EA.AB)$ est donc

$$2\Sigma(MAB_1) - 2\cot\alpha\,\Sigma(MAB) = 2\Sigma(MAB_1),$$

car $\Sigma(MAB) = 0$, le système AB, A'B', ... étant en équilibre par hypothèse.

Groupons maintenant nos forces en prenant AB d'une part, et le système A'B', A''B'', ... de l'autre. Le premier centre G_1 sera A, et l'autre G_2 sera donné par l'équipollence

$$MG_2(\text{cj}\,A'B' - \text{cj}\,A''B'' + \ldots) = MA'.\text{cj}\,A'B' + MA''.\text{cj}\,A''B'' + \ldots,$$

quel que soit le point M. Il suit de là que, le système se réduisant à AB appliquée en A et à $-$ AB appliquée en G_2, le couple résultant d'une rotation de ces deux forces d'un angle

droit dans le sens positif aura pour expression

$$2\,\mathrm{MAB}_1 + 2(\mathrm{MA'B'_1} + \mathrm{MA''B''_1} + \ldots),$$

c'est-à-dire précisément $\Sigma(\mathrm{EA.AB})$. Si l'on tient compte des remarques préalables qui précèdent, la proposition est donc complètement établie.

Question 831.

(1867, p. 479.)

Soient α, β, γ, δ, ε *cinq quantités quelconques. Posons*

$$\mathrm{A} = (\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$\mathrm{B} = (\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$\mathrm{C} = (\alpha-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2,$$
$$\mathrm{D} = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2 + (\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2,$$
$$\mathrm{E} = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2;$$
$$\Pi = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2$$
$$\times(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2$$
$$\mathrm{P} = \sum(\alpha-\beta)^4(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2.$$

Démontrer la relation suivante

$$\mathrm{ABCDE} - 2\mathrm{P}^2 = 24\,\Pi.$$

(Michael Roberts).

SOLUTION

Par M. P. Sondat.

Si l'on pose $\Delta = \mathrm{ABCDE} - 2\mathrm{P}^2$, il s'agit d'établir l'identité

(1) $$\Delta = 24\,\Pi.$$

En supposant $\alpha = \beta$, on a

$$\mathrm{B} = \mathrm{A},$$
$$\mathrm{C} = 2\quad(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2,$$
$$\mathrm{D} = 2\quad(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\varepsilon)^2,$$
$$\mathrm{E} = 2\quad(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2,$$
$$\mathrm{P} = 2\mathrm{A}(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2.$$

Donc $\Delta = 0$, ou Δ est divisible par $\alpha - \beta$ et de plus par $(\alpha - \beta)^2$, car cette différence n'entre dans Δ que par ses puissances *paires*. Comme d'ailleurs les carrés des dix différences sont symétriques dans Δ, cette fonction est divisible par chacun de ces carrés.

Cela posé, si deux quelconques des quantités α, β, γ, δ, ε sont égales, l'identité (1) aura lieu puisque alors Δ et Π sont nuls, et il reste à prouver qu'elle subsiste quand ces quantités sont toutes *différentes*.

En effet, on a

$$(2) \qquad \Delta = (\alpha - \beta)^2 \Delta_1,$$

Δ_1 étant une nouvelle fonction des mêmes différences, n'y figurant que par leurs puissances paires.

Si dans (2) on fait $\beta = \gamma$ on aura

$$0 = (\alpha - \gamma) \Delta'_1,$$

ou $\Delta'_1 = 0$, car $\alpha \neq \gamma$. Donc Δ_1 est divisible par $\beta - \gamma$, et par suite par $(\beta - \gamma)^2$, ou

$$\Delta_1 = (\beta - \gamma)^2 \Delta_2,$$

et, en remplaçant dans (2),

$$(3) \qquad \Delta = (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 \Delta_2.$$

En continuant de même, on trouvera finalement

$$\Delta = \Pi \times \lambda,$$

λ étant numérique, car Δ et Π sont du même degré. Le nombre λ s'obtiendra d'ailleurs en faisant, par exemple, $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, ce qui donne $\lambda = 24$, et l'identité (1) est justifiée.

Remarque. — Si α, β, γ, δ, ε sont les racines de l'équation

$$ax^5 - 5bx^4 + 10cx^3 - 10dx^2 + 5ex - f = 0,$$

chacune des conditions $\Delta = 0$, $\Pi = 0$ exprime que cette équation a une racine double. Il est probable que la première, $\Delta = 0$, est une forme déguisée de celle que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales* (question 1782).

Question 1780.

(1897, p. 288.)

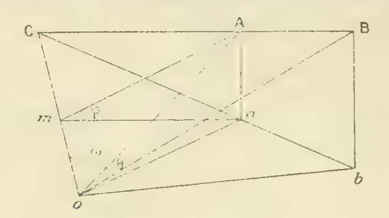
On projette orthogonalement un parallélogramme suivant un carré. Trouver la diagonale du carré en fonction des côtés du parallélogramme et de l'angle compris.

(W.-J. Greenstreet.)

SOLUTION

Par M. Dulimbert.

Soient $OA = a$, $OB = b$ les deux côtés du parallélogramme, θ l'angle compris AOB. Je fais passer le plan de projection



par le sommet O. Soient $Aa = \alpha$, $Bb = \beta$ les projetantes des sommets A et B.

Soit $x = Oa = Ob$ le côté du carré; la diagonale cherchée est $x\sqrt{2}$.

La figure donne immédiatement

$$a^2 = x^2 + \alpha^2,$$
$$b^2 = x^2 + \beta^2,$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = \overline{ab}^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2x^2 + (\alpha - \beta)^2.$$

Entre ces trois équations, j'élimine α et β. Il vient

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = 2x^2 + a^2 - x^2 + b^2 - x^2 - 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}$$

ou

$$a^2 b^2 \cos^2\theta = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$$

et en ordonnant

$$x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2 b^2 \sin^2\theta = 0.$$

On voit par substitution que l'équation en x^2 a deux racines positives, l'une inférieure à la plus petite des deux quantités a^2 et b^2, l'autre supérieure à la plus grande. La première convient seule à la question. Le double de cette racine, égal au carré de la diagonale cherchée, a pour expression

$$a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}.$$

La diagonale a donc pour valeur

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}$$

ou

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\theta} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta}.$$

On déduit de là la valeur de l'angle φ que fait le plan du parallélogramme avec le plan de projection. En effet, la surface du parallélogramme est

$$ab\sin\theta;$$

celle du carré est

$$\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}{2}.$$

Donc, on a

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\theta}}{2ab\sin\theta}.$$

Il est facile de vérifier que cette valeur est toujours inférieure à 1.

Question 1781.

(1897, p. 388 et 436.)

Énoncé rectifié. — *Soient donnes trois nombres positifs* x, y, z, *tels que* $x + y + z = 1$. *On a les inégalités*

$$x^2 + y^2 + z^2 > \frac{5}{16},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 48xyz.$$

(Jorge F. d'Avillez.)

SOLUTION

Par Un abonné.

1° $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}[(x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

$$=\frac{1}{3}[1+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqq\frac{1}{3}>\frac{5}{16};$$

2° $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$

$$=9+\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-x)^2}{zx}\geqq 9;$$

$xyz\leqq\frac{1}{27}$, le maximum de xyz correspondant à $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Donc $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{xyz}\geqq 243>48.$

Plus généralement, si la somme des nombres positifs x_1, x_2, ..., x_n est k,

$$\sum x_i^2\geqq\frac{k^2}{n},\qquad\sum\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{k},\qquad x_1x_2\ldots x_n\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^n,$$

$$\sum\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^{n-2}}{k^{n+1}}x_1x_2\ldots x_n.$$

QUESTIONS.

359. (**1857**, p. 58) (¹). — Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer.

360. (**1857**, p. 58). — A, B, C, D, E étant cinq points situés

(¹) La question 359 a été résolue (**1857**, p. 176). On en reproduit ici l'énoncé parce qu'il est nécessaire pour l'intelligence de la question 360

sur cette surface de révolution, on a la relation

$$OA.BC.DE + OB.CD.EA + OC.DE.AB + OD.EA.BC + OE.AB.CD = 0.$$

(MÖBIUS).

383. (1857, p. 182). — Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n ; 2° un triangle dont les côtés sont donnés par les trois équations linéaires

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0;$$

d'un point quelconque M pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R ; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré n ; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$.

√ 1791. Dans un quadrangle quelconque ABCD, soient :

α le cercle passant par les projections de A sur les côtés du triangle BCD ;

β le cercle passant par les projections de B sur les côtés de CDA ;

γ le cercle passant par les projections de C sur les côtés de DAB ;

δ le cercle passant par les projections de D sur les côtés de ABC.

Démontrer que les cercles α, β, γ, δ passent par le même point, qui est le point commun aux cercles d'Euler des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. (G. GALLUCCI.)

1792. Démontrer la formule

$$(-1)^k C_{m-1}^k = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^k C_m^k,$$

où C_m^k désigne le nombre des combinaisons simples de m lettres k à k. (A. CAZAMIAN.)

1793. Si S_2 désigne un carré ou une somme de carrés, tous

différents entre eux, tout nombre entier est de la forme $S_2 + p (p = 0, 1, 2, 4)$. (E. LEMOINE.)

1794. S_3 représentant un cube ou une somme de cubes *tous différents* et p_1 l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, tout nombre entier est de la forme $S_3 + p_1$, au moins pour une valeur de p_1. (E. LEMOINE.)

1795. Parmi les triangles qui ont pour côtés trois entiers consécutifs, il n'en est qu'un seul dans lequel le rapport de deux angles soit un entier : c'est le triangle qui a pour côté 4, 5, 6; dans ce triangle, un angle est double de l'autre.

(WEILL.)

1796. Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux cercles fixes, la somme des cosinus de ses angles reste constante; calculer cette constante.

(WEILL.)

ERRATA.

1897, page 579 (Tables), ligne 15 en remontant, *au lieu de* 1725, 1737, *lisez* 1725, 1726.

1897, page 579 (Tables), ligne 14 en remontant, *au lieu de* 1768, *lisez* 1728.

NOTE RELATIVE AUX QUESTIONS NON RÉSOLUES.

La liste que nous avons publiée (**1897**, p. 580) présente quelques erreurs, ainsi que nous l'avions prévu. Nous signalerons en particulier la question 625, comme devant être effacée; elle a été résolue (**1864**, p. 265); par contre, la question 1433 doit être ajoutée à la liste dont il s'agit. Nous remercions particulièrement, à ce sujet, M. HILAIRE et M. H. LEZ. Grâce aux très précieuses indications de ce dernier, nous espérons pouvoir arriver, à la fin de cette année, à donner un relevé tout à fait exact.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898.

Sujet.

I. *On dit que six points d'une conique forment trois couples en involution (ou sont en involution) quand les trois droites joignant les points de chaque couple sont concourantes.*

Établir que six points d'une conique peuvent être en involution de 1, 2, 3, 4 *ou* 6 *manières différentes et définir géométriquement, dans chaque cas, les positions correspondantes des six points.*

II. *On nomme* tétraédroïde *la transformée homographique générale de la surface de l'onde; en coordonnées homogènes, une telle surface est définie paramétriquement par les relations*

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_1 v}{\sigma v}, \\ \frac{y}{t} &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_2 v}{\sigma v}, \\ \frac{z}{t} &= \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma v}, \end{aligned} \right.$$

σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ *étant les fonctions classiques de Weierstrass formées avec les périodes* $2\omega_1$,

$2\omega_2$, $2\omega_3$; $\overline{\sigma} v$, $\overline{\sigma}_1 v$, $\overline{\sigma}_2 v$, $\overline{\sigma}_3 v$ [1] *étant les fonctions analogues formées avec les périodes* $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

Vérifier que la surface (1) *a seize points doubles, situés six à six dans seize plans (plans singuliers); que par un point double passent six plans singuliers; que les six points doubles* P_i, *situés dans un même plan singulier sont en involution; que les seize points doubles sont quatre par quatre sur les faces d'un tétraèdre et que les seize plans singuliers passent quatre par quatre par les sommets du même tétraèdre.*

III. *Montrer que les périodes (ou les modules) des fonctions elliptiques peuvent être choisies de telle sorte que les six points doubles* P_i *(situés dans un même plan singulier) soient en involution de deux manières différentes. Vérifier que la surface* (1) *est alors deux fois tétraédroïde, c'est-à-dire que les seize points doubles sont, quatre par quatre, sur les faces d'un nouveau tétraèdre. Équation correspondante de la surface.*

IV. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de trois manières différentes; vérifier que la surface* (1) *est alors trois*

[1] On désignera par e_1, e_2, e_3 les valeurs de $p\omega_1$, $p\omega_2$, $p\omega_3$, pu étant la fonction classique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; par ε_1, ε_2, ε_3 les valeurs de $\overline{p}\varpi_1$, $\overline{p}\varpi_2$, $\overline{p}\varpi_3$, $\overline{p}v$ étant la fonction analogue aux périodes $2\varpi_1$, $2\varpi_2$, $2\varpi_3$.

fois tétraédroïde. Étudier les positions relatives des trois tétraèdres correspondants.

Former la relation qui existe en ce cas entre les modules des fonctions elliptiques introduites $\left(\textit{on prendra pour modules } \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \textit{ et } \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right)$, *vérifier qu'elle coïncide avec l'équation modulaire pour* $n = 3$. *Conséquence pour les périodes. Équation correspondante de la surface.*

V. *Montrer que les six points doubles* P_i *peuvent être en involution de quatre manières différentes et que la surface est alors quatre fois tétraédroïde. Déterminer en ce cas les périodes et les modules des fonctions elliptiques. Équation de la surface; étudier les positions relatives des seize points doubles.*

VI. *Montrer que les six points* P_i *peuvent être en involution de six manières différentes et que la surface est alors six fois tétraédroïde. Périodes et modules des fonctions elliptiques; équation de la surface; positions relatives des seize points doubles.*

NOTA. — *On ne devra pas s'appuyer sur la théorie des fonctions ou des intégrales hyperelliptiques ni sur les propriétés de la surface de Kummer.*

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 NOVEMBRE 1898, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 1er novembre et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er décembre 1898, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient re-

portés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[A3c]

SUR LES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS RATIONNELS;

PAR M. R. DEDEKIND, de Brunswick.

Jahresbericht der D. M. V., Tome I, 1892 (G. Reimer, Berlin).

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

L'existence de théorèmes sur les équations, légitimes pour un degré quelconque fini, mais qui ne peuvent être admis pour des équations de degré infiniment grand sans discussion préalable, est un fait aujourd'hui reconnu par tous les mathématiciens. Mais comme la décision à rendre n'est pas toujours facile à trouver, je prends la liberté de traiter ici un cas particulier qui n'est pas sans importance. Dans la théorie des équations qui sont de degré *fini* et ont tous leurs coefficients *rationnels*, on démontre le théorème connu suivant :

I. *Lorsque l'équation irréductible* $\varphi(x) = 0$ *a une racine commune avec l'équation* $\psi(x) = 0$, *chaque racine de la première équation est aussi une racine de la seconde.*

Mais ce théorème, lorsque le degré de l'équation $\psi(x) = 0$ est *infiniment grand*, cesse en général d'être exact, et ce fait a lieu même pour de telles équations dont le premier membre $\psi(x)$ est une série de puissances à coefficients rationnels, convergente pour *toutes* les valeurs de x. C'est là une conséquence évidente du théorème :

II. *Si nous désignons par α un nombre réel quelconque,* IL EXISTE *une telle équation $\psi(x) = 0$ de degré infiniment grand, ou même de degré fini, qui a pour* UNIQUE *racine* RÉELLE α.

A-t-on démontré l'exactitude de cette proposition, il en résulte une évidente contradiction avec le théorème I, lorsque l'on choisit pour α une racine d'une équation irréductible $\varphi(x) = 0$ (par exemple $x^2 - 2 = 0$) qui admet au moins deux racines réelles α et β. Il ne s'agit donc par conséquent que de démontrer le théorème II, et l'on n'a ici besoin que de considérer le cas de α *positif*, puisque le cas opposé s'y ramène en remplaçant x par $-x$; au cas $\alpha = 0$, l'on peut naturellement prendre $\psi(x) = x$.

De tout nombre positif α, d'une manière analogue et avec le même mode de détermination que, lors d'un développement en fraction continue usuelle, on déduira une suite de nombres *entiers* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et une suite de *restes* correspondants, c'est-à-dire de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ qui satisfont tous à la condition

$$0 \leqq \varepsilon_\nu < 1,$$

à l'aide de la règle suivante :

On posera d'abord

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1.$$

où a_1 est déterminé comme étant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$, ε_1 étant, par conséquent, déterminé comme reste; mais pour chaque indice n plus grand l'on posera

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots$$

tous les nombres a suivants comme plus grands entiers et *tous* les restes ε sont de la sorte parfaitement déterminés. Il est clair, du reste, qu'*aucun* des nombres a n'est *négatif*.

Alors la fonction parfaitement définie

$$\psi(x) = -1 + a_1\frac{x}{1} + a_2\frac{x^3}{1.2} + a_3\frac{x^5}{1.2.3} + \ldots + a_n\frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} \ldots$$

possède toutes les propriétés énoncées dans le théorème II. En effet :

1° Les coefficients de $\psi(x)$ sont tous des nombres *rationnels*.

2° Puisque $\varepsilon_{n-1} < 1$, par conséquent $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, et le terme général de la série $\psi(x)$ est inférieur, en valeur absolue, à

$$\frac{x}{\alpha^2}\frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

d'où il résulte, comme l'on sait, que la série $\psi(x)$ (comme il en est de la série exponentielle) converge pour *chaque* valeur de x.

3° De la définition des nombres a et ε, il résulte que la somme formée de $n+1$ termes

$$-1 + a_1\frac{\alpha}{1} + a_2\frac{\alpha^3}{1.2} + a_3\frac{\alpha^5}{1.2.3} + \ldots + a_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

est égale à

$$-\varepsilon_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)},$$

et, comme cette somme pour n croissant sans limite devient infiniment petite, il en résulte $\psi(\alpha) = 0$; autrement dit, α est une *racine* de l'équation $\psi(x) = 0$.

4° Puisque aucun des nombres a n'est négatif, mais qu'à la vérité au moins l'un d'eux est positif [en vertu de $\psi(\alpha) = 0$], et comme ensuite, abstraction faite du terme constant -1, la variable x, dans la série, se présente élevée seulement à des puissances d'exposant impair, $\psi(x)$, en même temps que x, parcourra toujours en croissant la totalité du domaine réel depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et, par conséquent aussi, ne prendra la valeur zéro que pour l'*unique* valeur $x = \alpha$; autrement dit, l'équation $\psi(x) = 0$ n'admet *aucune racine réelle, hormis* α. C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré que le théorème I est *sujet à caution* pour les équations $\psi(x) = 0$ de degré infiniment grand. Cette démonstration n'est certes pas sans valeur, car divers géomètres sont arrivés à penser que, en appliquant ce théorème, sujet à caution, à l'exemple

$$\psi(x) = \sin x,$$

on pourrait obtenir une démonstration de la transcendance du nombre π qui n'exigerait qu'un petit nombre de lignes.

La démonstration du théorème II, c'est facile à voir, peut être modifiée d'une foule de manières. Il est, en même temps, clair que le théorème est aussi valable pour un nombre quelconque fini de racines réelles α assignées d'avance (¹).

(¹) M. Dedekind me prie de mentionner ici un Mémoire de M. A. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. XIV; 1889) où la même question a été traitée d'une manière beaucoup plus générale. (L. L.)

[E5]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

PAR M. GODEFROY,
Bibliothécaire universitaire.

Les méthodes que l'on donne dans tous les Ouvrages pour calculer les intégrales de Fresnel recourent à l'emploi des imaginaires et impliquent par là même la connaissance de la théorie de l'intégration d'une fonction d'une variable complexe, à moins de manquer de logique ou de rigueur. Cependant, par une légère modification de procédés connus (*voir* H. LAURENT, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 137), on peut éviter l'introduction du nombre i; c'est la seule originalité de la démonstration suivante.

Si dans l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on fait le changement de variable $x = y\sqrt{t}$, on en tire

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ty^2}\,dy,$$

d'où, en multipliant les deux membres par $\sin t\,dt$, puis par $\cos t\,dt$ et intégrant par rapport à t de 0 à $l'\infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-ty^2}\sin t\,dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-ty^2}\cos t\,dt;$$

mais on sait que

$$\int_0^\infty e^{-ty^2}\sin t\,dt = \frac{1}{1+y^4}, \qquad \int_0^\infty e^{-ty^2}\cos t\,dt = \frac{y^2}{1+y^4};$$

par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4};$$

si dans la première de ces intégrales on change y en $\frac{1}{y}$, on obtient la seconde, on en conclut que les deux intégrales sont égales entre elles et, par suite, à leur demi-somme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy;$$

or

$$\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+y\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2-y\sqrt{2}+1},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{1+y^2}{1+y^4}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{arc tang}\left(\frac{2y}{\sqrt{2}}+1\right) + \text{arc tang}\left(\frac{2y}{\sqrt{2}}-1\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

on a donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ou, en posant $x^2 = t$,

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

[O51]

NOTE SUR LES GÉODÉSIQUES DU CONE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

M. Enneper [1] a trouvé par le premier que, le long d'une géodésique du cône, le rapport des deux rayons de première et deuxième courbure est exprimé par une fonction linéaire de l'arc de la même ligne. Ensuite, M. Pirondini [2] a montré que ces géodésiques sont caractérisées par la propriété d'avoir les plans osculateurs à la même distance du sommet, et il en a donné l'équation intrinsèque de plusieurs manières, indépendamment de la remarquable propriété trouvée. On peut, d'une manière très simple et élégante, arriver à la recherche de cette équation : c'est ce que je me suis proposé de montrer dans cette Note.

Soient

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ (\cos\xi, \cos\varphi, \cos\zeta)\ (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale d'une courbe gauche L, dont s est l'arc, ρ et T étant les rayons de courbure et $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point fixe de l'espace. Si x, y, z sont les coordonnées courantes d'un point de la courbe, exprimées par l'arc s, posons

$$(1)\quad \begin{cases} A = (x_0 - x)\cos\alpha + (y_0 - y)\cos\beta + (z_0 - z)\cos\gamma, \\ B = (x_0 - x)\cos\xi + (y_0 - y)\cos\varphi + (z_0 - z)\cos\zeta, \\ C = (x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu. \end{cases}$$

(1) *Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung* (*Math. Annalen*, Band 19; 1882).

(2) *Sulle linee a doppia curvatura* (*Giornale di Matematiche*; 1888).

A, B, C seront les distances du point P_0 aux plans : normal, rectifiant et osculateur de L respectivement.

Remarquons les relations qui lient ces quantités :

$$(2)\qquad \frac{dA}{ds} = \frac{B}{\rho} - 1, \qquad \frac{dB}{ds} = -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T}, \qquad \frac{dC}{ds} = \frac{B}{T};$$

on les obtient en différentiant les relations (1) et en tenant compte des formules de Serret.

Supposons d'abord que la courbe L ait ses plans osculateurs équidistants du point P_0 : ce qui correspond à faire C constant. Dans cette hypothèse, les formules (2) montrent que B est nul. Il en résulte que tous les plans rectifiants passent par P_0 et que la développable rectifiante de L est le cône qui la projette du point P_0 et duquel elle est une géodésique.

Cela posé, on voit facilement que les relations (2) conduisent à l'équation

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right) = \frac{1}{C},$$

qui nous montre que $\frac{\rho}{T}$ est exprimé par une fonction linéaire de l'arc.

Réciproquement, supposons que pour une ligne on ait

$$\frac{\rho}{T} = as + b \qquad (a, b \text{ const.}).$$

Les expressions

$$x - \frac{1}{a}\left(\cos\lambda - \frac{\rho}{T}\cos\alpha\right),$$

$$y + \frac{1}{a}\left(\cos\mu - \frac{\rho}{T}\cos\beta\right),$$

$$z + \frac{1}{a}\left(\cos\nu - \frac{\rho}{T}\cos\gamma\right).$$

ayant pour dérivées respectives

$$\left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\alpha, \qquad \left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\beta,$$
$$\left[1 - \frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho}{T}\right)\right]\cos\gamma,$$

on aura, x_0, y_0, z_0 étant trois constantes,

$$x + \frac{1}{a}\left(\cos\lambda - \frac{\rho}{T}\cos\alpha\right) = x_0,$$
$$y + \frac{1}{a}\left(\cos\mu - \frac{\rho}{T}\cos\beta\right) = y_0,$$
$$z + \frac{1}{a}\left(\cos\nu - \frac{\rho}{T}\cos\gamma\right) = z_0.$$

Il suit de là

$$(x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu = \frac{1}{a},$$

et par conséquent notre ligne, ayant ses plans osculateurs à la même distance du point $(x_0 y_0 z_0)$, est une géodésique du cône qui la projette de ce même point.

[R 2b]

SUR LA GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE GULDIN;

Par M. KUSCOW, à Saint-Pétersbourg.

Si nous avons dans l'espace un certain système de coordonnées curvilignes α, β, γ, la recherche des volumes des corps solides consiste à calculer la somme

$$V = \Sigma v_1,$$

où v_1 est un volume infiniment petit limité par six sur-

faces α, $\alpha + d\alpha$; β, $\beta + d\beta$; γ, $\gamma + d\gamma$.

$$v_1 = \frac{dS_1}{d\alpha}\,d\alpha\,\frac{dS_2}{d\beta}\,d\beta\,\frac{dS_3}{d\gamma}\,d\gamma \sin(S_1, S_2)\sin(S_3, S_1 S_2),$$

S_1 étant l'arc de la ligne d'intersection des surfaces des coordonnées qui sont déterminées par des paramètres β et γ; S_2 celui de la ligne d'intersection des surfaces α et γ; S_3 celui des surfaces α et β; (S_1, S_2) l'angle entre les lignes S_1 et S_2 dans le point M déterminé par les coordonnées α, β, γ; $(S_3, S_1 S_2)$ l'angle entre la ligne S_3 et le plan $S_1 M S_2$.

Si nous prenons la somme des divers v_1 qui correspondent aux différentes valeurs du paramètre α, comprises entre α_1 et α_2, nous obtiendrons le volume d'un corps compris entre les surfaces α_1 et α_2, β et $\beta + d\beta$, γ et $\gamma + d\gamma$; en nous proposant de calculer le volume du corps limité par une surface fermée déterminée par l'équation

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

nous remarquons que α_1 et α_2 doivent être deux racines consécutives de l'équation (1) en y considérant β et γ comme déterminés. Il est aisé de voir que si l'équation (1) représente une surface fermée, à chaque système de valeurs de β et γ correspondra un nombre pair de racines réelles. Dans ce cas, il faut prendre plusieurs sommes correspondant aux éléments de l'intérieur du volume.

La première intégration par rapport à α donne

$$v_2 = \Sigma_\alpha v_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dS_1}{d\alpha}\,d\alpha\,\frac{dS_2}{d\beta}\,d\beta\,\frac{dS_3}{d\gamma}\,d\gamma \sin(S_1, S_2)\sin(S_3, S_1 S_2)$$
$$= \Phi_1(\beta, \gamma)\,d\beta\,d\gamma.$$

Prenons la somme des divers v_2 qui correspondent aux

différentes valeurs du paramètre β comprises entre β_1 et β_2, nous obtenons le volume d'une couche infiniment mince que découpent du corps les surfaces γ et $\gamma + d\gamma$; β_1 et β_2 étant déterminées comme deux racines consécutives de l'équation

$$\text{(II)} \qquad \Phi_1(\beta, \gamma) = 0$$

par rapport à β; il en résulte que l'équation (II) doit avoir un nombre pair de racines réelles par rapport à β.

Cette seconde intégration nous donne

$$v_3 = \Sigma_\beta v_2 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi_1(\beta, \gamma)\, d\beta\, d\gamma = \Phi_2(\gamma)\, d\gamma.$$

En intégrant enfin v_3 entre les limites γ_1 et γ_2 nous obtiendrons le volume du corps entier.

Les paramètres γ_1 et γ_2 sont déterminés par les surfaces γ tangentes au corps de deux côtés opposés; pour cela il faut que γ_1 et γ_2 soient deux racines consécutives de l'équation

$$\text{(III)} \qquad \Phi_2(\gamma) = 0.$$

On voit que l'équation (III) doit avoir un nombre pair de racines réelles

$$V = \Sigma_\gamma v_3 = \Sigma_\gamma \Sigma_\beta v_2 = \Sigma_\gamma \Sigma_\beta \Sigma_\alpha v_1$$
$$= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dS_1}{d\alpha} \frac{dS_2}{d\beta} \frac{dS_3}{d\gamma} \sin(S_1 S_2) \sin(S_3 . S_1 S_2)\, d\alpha.$$

Le cas général de la cubature des volumes, comme nous voyons, se ramène à une intégration triple; mais quand nous savons *a priori* le volume v_2, nous aurons le volume entier par une intégration double. Dans le cas où le volume v_3 est donné comme une fonction dé-

terminée de γ, le volume total sera obtenu par une intégration simple.

Le dernier cas de la cubature se présente ordinairement quand nous savons l'aire de la section du corps par des plans parallèles à un plan donné quelconque; alors nous pouvons égaler le volume de la couche au volume d'un cylindre qui a la même aire de base et une hauteur égale à la distance entre deux plans voisins; d'où

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S\,dx,$$

S étant l'aire de la section et une fonction de x.

Voyons ce que nous aurons si nous prenons pour surfaces des coordonnées des plans menés par un axe quelconque, c'est-à-dire quand l'angle θ sera le paramètre γ.

Nous pouvons égaler le volume de la couche infiniment mince, que découpent dans le corps les plans θ et $\theta + d\theta$ à un cylindre droit coupé par un plan qui fait l'angle $d\theta$ avec le plan de la base.

Le volume d'un cylindre coupé par un plan est égal, comme nous savons, à S.H, où S est l'aire de la base et H la hauteur, correspondant à son centre de gravité.

Ainsi v_3, volume de la couche infiniment mince que découpent dans le corps les plans θ et $\theta + d\theta$, est égal à $SK \operatorname{tang}(d\theta)$ ou à $SK\,d\theta$ (où S est l'aire de la section du solide par le plan θ, K la distance de son centre de gravité à l'axe OZ).

Comme nous l'avons déjà dit, S et K doivent être des fonctions de θ.

Nous avons donc

$$V = \Sigma_\gamma v_3 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Phi_2(\gamma)\,d\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} SK\,d\theta.$$

Nous remarquons que c'est une généralisation du théorème classique de Guldin, dans lequel $S = \text{const.}$, $K = \text{const.}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, d'où

$$V = S 2\pi K.$$

Appliquons cette formule aux cas suivants.

1. Nous avons une vis dont la hauteur égale H; la hauteur h du filet est égale au pas.

$$V = \pi H \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

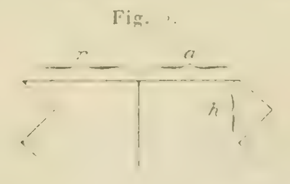
Fig. 1.

2. Nous avons une vis dont le filet est engendré par le mouvement d'un triangle isoscèle

$$V = \pi \frac{H}{3} (a^2 + ar + r^2).$$

Cette généralisation peut être faite aussi pour le second théorème de Guldin concernant les surfaces.

Fig. 2.



En effet, pour les coordonnées cylindriques, nous avons

$$S = \int\int \frac{1}{\cos\varphi} \rho \, d\theta \, d\rho.$$

où ν est l'angle entre la normale à un point quelconque et l'axe OZ. Si nous menons par l'axe OZ et par ce point M un plan, projetons sur ce plan la normale et indiquons par λ l'angle entre la normale et sa projection, et par μ l'angle entre la projection de la normale et l'axe OZ; nous avons

$$\cos\nu = \cos\lambda\cos\mu,$$

puis

$$\frac{d\rho}{\cos\mu} = dl,$$

où l est l'arc de la section du corps par le plan mené par le point M et l'axe OZ.

Si l'angle λ n'est qu'une fonction de θ, nous aurons

$$S = \int \frac{d\theta}{\cos\lambda}\int dl\,\rho = \int l\mathrm{K}\frac{d\theta}{\cos\lambda},$$

où l est l'arc de la section et K la distance de son centre de gravité à l'axe OZ.

Si l'équation de la surface est $z = f(\rho, \theta)$, nous obtenons pour $\cos\lambda$ l'expression suivante

$$\text{(IV)}\qquad \cos\lambda = \rho\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2}{\rho^2\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + \rho^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}}.$$

Comme λ n'est qu'une fonction de θ, nous avons

$$\frac{d(\cos\lambda)}{d\rho} = 0$$

ou

$$\text{(V)}\qquad \rho^2\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right] = \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\psi^2(\theta),$$

où $\psi(\theta)$ est une fonction quelconque de θ.

En intégrant l'équation (V), nous obtenons

$$\text{(VI)}\qquad z = \sqrt{\alpha^2 - \rho^2} + \alpha\log\frac{\rho}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} + \alpha\psi(\theta) + \beta,$$

où α et β sont des constantes arbitraires. En y posant $\beta = \varphi(\alpha)$ et en éliminant α de l'équation (VI) et de l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0 = \log \frac{\rho}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \rho^2}} + \psi(\theta) + \varphi'(\alpha),$$

nous obtenons deux genres les plus simples des surfaces qui satisfont à l'équation (V) :

1° Surfaces de rotation ;

2° Surfaces coniques.

Il est aisé d'obtenir le premier résultat au moyen de l'équation (IV) en y posant $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$; alors $\cos\lambda = 1$.

Si, dans les cas des surfaces coniques, nous indiquons par a l'angle entre l'axe OZ et la génératrice, nous obtenons

$$\cos\lambda = \frac{\cos a}{\sqrt{\cos^2 a + \left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)^2}}.$$

[M¹3e] [M²2e]

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE DE RECHERCHE DES CENTRES DANS LES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES ;

Par M. S. MANGEOT,

Docteur ès Sciences.

Je considère un polynome entier $f(x, y, z, \ldots)$ à n variables $x, y, z, \ldots$, de degré m, et je suppose que, ayant calculé l'une quelconque

$$Ax + By + Cz + \ldots + H = u \qquad (A)$$

de ses dérivées partielles d'ordre $m - 1$ (ce qui se fait

immédiatement à l'inspection du polynome), on ordonne le polynome $f\left(2x - \frac{u}{A}, y, z, \ldots\right)$ suivant les puissances de x. Soit $\sum x^\lambda \varphi_\lambda(y, z, \ldots)$ ce dernier polynome ainsi ordonné. La fonction $f(x, y, z, \ldots)$ peut s'écrire $\sum \left(\frac{u}{A}\right)^\lambda \varphi_\lambda(y, z, \ldots)$, et l'on vérifie sans difficulté cette proposition :

Pour que l'on ait

$$\begin{aligned} &f(x + x_0, y + y_0, z + z_0, \ldots) \\ &\quad = \varepsilon f(-x + x_0, -y + y_0, -z + z_0, \ldots) \qquad (\varepsilon = \pm 1), \end{aligned}$$

$x_0, y_0, z_0, \ldots$ étant des constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \ldots + H = 0,$$

$$\varphi_\lambda(y + y_0, z + z_0, \ldots) = (-1)^\lambda \varepsilon \varphi_\lambda(-y + y_0, -z + z_0, \ldots)$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots) \text{ [1]}.$$

Dès lors, étant donné un polynome entier

$$f(x, y, z, \ldots)$$

à n variables, si l'on se propose de chercher à donner à ces variables des accroissements tels que la nouvelle expression du polynome ne change pas, en valeur absolue, quand on y change les signes de toutes les variables, ce problème peut être ramené à un problème analogue à traiter sur des polynomes entiers

$$\varphi_\lambda(y, z, \ldots)$$

dépendant de $n - 1$ variables au plus, et calculés comme je viens de le dire. Il pourra donc être résolu par des

---

(1) Si un polynome entier en $x, y, z, \ldots$ satisfait à l'identité $F(x+x_0, y+y_0, z+z_0, \ldots) = \pm F(-x+x_0, -y+y_0, -z+z_0, \ldots)$, toutes ses dérivées partielles y satisfont aussi.

applications successives de cette méthode; car on sait résoudre le problème dans le cas d'une seule variable.

Je vais donner la solution de la question par cette méthode lorsque la fonction f ne dépend que de 2 ou de 3 variables : le problème est ici identique à celui de la recherche des centres dans les courbes et dans les surfaces algébriques.

Cas des courbes. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation entière et cartésienne d'une courbe plane d'ordre m, non formée uniquement de droites parallèles.

Je prends à volonté un terme de degré m dans le polynome $f(x, y)$, et, x étant une variable entrant dans ce terme, soient $ax^p y^q$ ce terme, b et c les coefficients des termes en $x^{p-1} y^{q+1}$ et $x^{p-1} y^q$; $\varphi(y)$ un coefficient non constant d'une puissance quelconque de x dans le polynome $f\left[x - \frac{b(q+1)y - c}{ap}, y\right]$, y compris la puissance x^0; $\alpha y^\mu + \beta y^{\mu-1} + \ldots$ le polynome $\varphi(y)$ ordonné suivant les puissances décroissantes de y.

La courbe n'a pas de centre en dehors du point d'intersection des deux droites

$$apx + b(q+1)y + c = 0, \qquad \mu\alpha y + \beta = 0,$$

point qui est déterminé et situé à distance finie.

On essayera si ce point est centre de la courbe ([1]).

Cas des surfaces. — Soient $f(x, y, z) = 0$ l'équation entière et cartésienne d'une surface d'ordre m, ren-

---

([1]) Pour que la courbe $f(x, y) = 0$ soit un système de droites concourantes, il faut et il suffit que le polynome

$$f\left[x + \frac{b(q+1)\beta - c\mu\alpha}{ap\mu\alpha}, y - \frac{\beta}{\mu\alpha}\right]$$

soit homogène.

fermant les trois variables x, y, z; $ax^p y^q z^r$ un terme de degré m pris à volonté dans le polynome $f(x, y, z)$ et contenant, par exemple, la variable x; b, c, d les coefficients des termes en $x^{p-1}y^{q+1}z^r$, $x^{p-1}y^q z^{r+1}$, $x^{p-1}y^q z^r$; et soit enfin $\sum x^\lambda \varphi_\lambda(y, z)$ le polynome $f\left[x - \frac{b(q+1)y + c(r+1)z + d}{ap}, y, z\right]$ ordonné suivant les puissances de x.

Pour que la surface ait un centre, il faut que celles des fonctions $\varphi_\lambda(y, z)$ qui ne sont pas nulles aient toutes leur degré de la même parité que λ, ou aient toutes leur degré de parité contraire à celle de λ. Quand cette condition est remplie, les centres de la surface sont les points du plan

$$apx + b(q+1)y + c(r+1)z + d = 0$$

dont les projections sur le plan des yz (faites parallèlement à l'axe des x) seraient des centres communs aux courbes de ce plan des yz qui ont les équations

$$\varphi_\lambda(y, z) = 0 \ (^1).$$

On est ainsi ramené à chercher les centres de courbes planes (²).

(¹) On regarde une courbe rejetée à l'infini ou indéterminée comme ayant pour centre tout point de son plan.

(²) Pour que l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente un cône il faut et il suffit que celles des fonctions $\varphi_\lambda(y, z)$ qui ne sont pas nulles aient leur degré égal à $m - \lambda$, et que le produit de ces fonctions, égalé à zéro, définisse un système de droites ayant un point commun (y_0, z_0). Le sommet du cône est le point qui a pour coordonnées

$$x = -\frac{b(q+1)y_0 + c(r+1)z_0 + d}{ap}, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1897. — COMPOSITIONS.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

Épreuve écrite. — *Étant donnée une congruence de droites définies par les équations*

$$x = uz + a^2 f(v),$$
$$y = vz + b^2 f(u),$$

où a et b sont des constantes données et où $f(u)$ est une fonction connue de u, déterminer les surfaces développables qui passent par l'une quelconque des droites.

Trouver le lieu des points où la droite considérée rencontre l'arête de rebroussement de chaque surface développable ; en d'autres termes, trouver la surface focale de la congruence.

On sera ramené aux quadratures. On peut intégrer complètement si $f(u)$ est un polynome du troisième degré en u. On fera le calcul pour $f(u) = u^3$.

Est-il nécessaire d'intégrer quand on ne cherche que la surface focale de la congruence?

Pour que les équations de la droite mobile représentent une surface développable, il faut que l'on ait la condition

$$b^2 f'(u)\,du^2 = a^2 f'(v)\,dv^2.$$

qui se décompose et donne la double équation

$$b\sqrt{f'(u)}\,du \pm a\sqrt{f'(v)}\,dv = 0.$$

L'intégration est en évidence. Les deux constantes sont fixées par le choix de la droite initiale. Le point où cette droite touche l'arête de rebroussement de l'une des surfaces développables est défini par l'équation

$$z_1\,du + a^2 f'(v)\,dv = 0,$$

ou

$$z_1 = -ab\sqrt{f'(u) + f'(v)}.$$

Dans le cas où l'on a

$$f(u) = u^3,$$

le calcul donne

$$bu^2 \pm av^2 = \text{const.} = k,$$

$$z_1 = -3abuv.$$

La surface focale, dont le point variable a pour coordonnées xy et z_1, est donc définie par les équations de la droite et par la dernière équation écrite. L'élimination de u et v n'offre rien de particulièrement remarquable relativement à cette surface.

On peut au contraire éliminer facilement u et v de manière à former les équations des deux développables qui passent par la droite initiale. On obtient les équations

$$xy = \left(-\frac{10}{27} \pm \frac{2}{9}\right)\frac{z^3}{ab} + k^2 z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 16(e^{-2x} + e^{2x}).$$

L'équation caractéristique a pour racines précisément les exposants 2 et -2 de e dans le second membre. On trouve par les méthodes classiques

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x + 2x^2) - e^{-2x}(C_3 + x).$$

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Énumérer et définir les éléments de l'orbite parabolique d'une comète.*

Ces éléments étant supposés connus, calculer les coordonnées héliocentriques et les coordonnées géocentriques de l'astre pour une date donnée.

II. *Un miroir plan est porté par un axe de rotation auquel il est parallèle et qui est lui-même parallèle à l'axe du monde.*

Cet axe de rotation est animé d'un mouvement uniforme qui lui fait exécuter une révolution complète, en quarante-huit heures sidérales, dans le sens du mouvement diurne apparent.

Démontrer que le ciel, vu par réflexion dans le miroir, paraît immobile.

II. L'image de la sphère céleste dans un plan est une sphère. Pour démontrer que cette image reste immobile dans le plan mobile, il suffit de démontrer que deux points ont leurs images immobiles. On choisira deux points de l'équateur céleste et l'on démontrera la proposition pour un seul de ces points.

Épreuve pratique. — *En un lieu dont la colatitude est γ, on a observé la distance zénithale z du centre du Soleil avant son passage au méridien.*

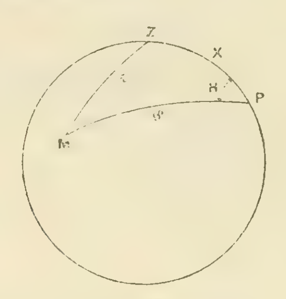
On connaît le temps vrai t, compté du méridien de Paris, auquel l'observation a été faite, ainsi que la distance polaire $\mathfrak{L}$ du centre du Soleil.

Calculer : 1° *la longitude du lieu de l'observation ;*
2° *L'erreur dont se trouve affectée cette longitude, par suite d'une erreur de* 10″ *commise sur la distance zénithale.*

Données numériques :

$$t = 18^h\,17^m\,39^s,41,$$
$$\mathfrak{L} = 99°\,32'\,33'',4,$$
$$\chi = 64°\,31'\,27'',5,$$
$$z = 53°\,19'\,23'',7.$$

On supposera que z est affranchie des effets de réfraction et de parallaxe.



$$2p = \chi + \mathfrak{L} + z. \qquad \operatorname{tang}\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\chi)\sin(p-\mathfrak{L})}{\sin p \sin(p-z)}}.$$

$2p$	217°.23′.24.6	$\sin(p-\chi)$	$\bar{1}$,8431077
p	108.41.42,3	$\sin(p-\mathfrak{L})$	$\bar{1}$,2015672
$p-z$	55.22.18,6	$\sin p$	$\bar{1}$,9764590
$p-\chi$	49.10.14,8	$\sin(p-z)$	$\bar{1}$,9153245
$p-\mathfrak{L}$	9. 9. 8,9	N	$\bar{1}$,0446749
$\frac{H}{2}$	20.39.39,56	D	$\bar{1}$,8917835
H	41.19.19,12	N : D	$\bar{1}$,1528914
H (en temps)	$2^h\,45^m\,17^s,27$	$\operatorname{tang}\frac{H}{2}$	$\bar{1}$,5764457
Temps local vrai	$21^h\,14^m\,42'',73$		
Temps de Paris vrai	$18^h\,17^m\,39'',41$		
Longitude est du lieu	2°57′ 3″,32		
Id. en arc	44°15′49″,8		

$$\Delta H = \Delta z \frac{\sin z}{\sin \chi \sin P \sin H} = k\,\Delta z.$$

$\sin z$	$\bar{1},904$	
$\sin \chi$	$\bar{1},956$	
$\sin P$	$\bar{1},994$	$\Delta H = \Delta z \times 1,36.$
$\sin H$	$\bar{1},820$	
$\sin \chi \sin P \sin H$	$\bar{1},770$	
k	$0,134$	

Si $\Delta z = 10''$, la longitude orientale est erronée de $\pm 13'',6$.

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Soit* P + Qi *une fonction analytique de* $z = x + y\,i$, P *et* Q *étant deux fonctions réelles de* x *et* y.

Démontrer qu'il existe une fonction analytique telle que

$$P + Q = \frac{4 \sin x}{e^{y} - e^{-y} + 2 \cos x},$$

qui devient égale à $1 + i$ *pour* $z = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer cette fonction, et trouver les valeurs de la variable qui la rendent nulle.

II. *Calculer la valeur de l'intégrale double*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y \cos(ax)}{x^8 + 16 b^8 - 8 b^4 (x^4 - y^4)}\,dx\,dy.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel, non pesant, glisse sans frottement sur la surface d'une sphère, dont il peut se séparer. Cette sphère est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe*

passant par son centre. Deux points fixes A et B, de masses égales, situés à l'intersection de la sphère et de son axe de rotation, attirent le point mobile proportionnellement aux masses et en raison inverse du cube de la distance. Étudier le mouvement relatif du point mobile, en supposant que sa vitesse relative initiale est nulle. En particulier, considérer la réaction de la sphère et dire si le mobile abandonne la sphère.

Épreuve pratique. — *Établir les équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Applications.*

Astronomie.

Épreuve pratique. — *Le 26 novembre 1897, à midi moyen de Paris, les coordonnées équatoriales de la Lune sont :*

$$\text{Ascension droite} \ldots \quad \alpha = \quad 18^h 52^m 2^s, 38$$
$$\text{Déclinaison} \ldots\ldots\ldots \quad \delta = -24^\circ 21' 20'', 7$$

et les variations de ces coordonnées pour une minute de temps moyen sont :

$$\Delta\alpha = 2^s, 6688,$$
$$\Delta\delta = 6'', 466.$$

On demande de calculer la latitude et la longitude de l'astre au même instant, ainsi que les variations de ces coordonnées pour une minute de temps moyen.

L'inclinaison de l'écliptique est de

$$23^\circ 27' 9'', 46.$$

Il n'y a pas eu d'épreuve pratique de Calcul différentiel et intégral, aucun candidat n'ayant été admissible.

Nancy.

Calcul différentiel et intégral.

Vérifier que l'équation différentielle du second ordre

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=0,$$

où n désigne un nombre entier positif, admet comme solution particulière un polynome de degré n, et calculer les coefficients de ce polynome.

Déduire de là la solution générale de l'équation différentielle et la ramener à une quadrature. Quelle est, dans le domaine de l'origine, la forme analytique de cette quadrature et celle de la solution générale?

Analyse supérieure.

I. *Démontrer qu'un système complet de m équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes à m + n variables indépendantes peut toujours être ramené à un système jacobien. Déduire de là qu'il admet n intégrales distinctes.*

II. *Les coordonnées x, y, z d'un point d'une certaine courbe, étant exprimées en fonction d'un paramètre t, satisfont aux trois équations différentielles,*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x^2(y^2-z^2)}{yz},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y^2(z^2-x^2)}{zx},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{z^2(x^2-y^2)}{xy};$$

en outre cette courbe passe par le point (x_0, y_0, z_0) qui

répond à la valeur $t = 0$ du paramètre. On pose

$$x_0^2 y_0^2 z_0^2 = \frac{\alpha\beta^3}{27},$$

$$y_0^2 z_0^2 + z_0^2 x_0^2 + x_0^2 y_0^2 = \frac{\alpha\beta^2}{3},$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \gamma.$$

et l'on désigne par u la somme $x^2 + y^2 + z^2$.

1° *Former l'équation du troisième degré à coefficients fonctions de u qui admet pour racines*

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2.$$

2° *Déterminer pour chaque valeur de la constante α l'intervalle dans lequel varie la variable positive u.*

3° *Exprimer u à l'aide de t en employant la fonction $\wp$ de Weierstrass si $\alpha \neq 1$, et examiner particulièrement le cas de $\alpha = 1$.*

II. En formant $d(x^2)$, $d(y^2)$ et $d(z^2)$, on voit que

$$d\mathrm{L}(x^2 y^2 z^2) \quad \text{et} \quad d\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

sont nuls, de sorte que l'on a déjà

$$x^2 y^2 z^2 = x_0^2 y_0^2 z_0^2 = \frac{\alpha\beta^3}{27},$$

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = y_0^2 z_0^2 + z_0^2 x_0^2 + x_0^2 y_0^2 = \frac{\alpha\beta^2}{3};$$

comme on pose $x^2 + y^2 + z^2 = u$, x^2, y^2 et z^2 sont les racines de l'équation

$$(1) \qquad X^3 - uX^2 + \frac{\alpha\beta^2}{3} X - \frac{\alpha\beta^3}{27} = 0.$$

Pour que les racines soient réelles et positives, il faut que α et β soient positifs, et que u rende positive la fonction

$$\varphi(u) = -4u^3 + 3\alpha\beta u^2 + 6\alpha\beta^2 u - (4\alpha - 1)\alpha\beta^3;$$

il est nécessaire pour cela que $\varphi(u)$ ait ses trois racines réelles et que u soit compris entre les deux racines positives; pour que ces conditions soient réalisables, il faut et il suffit que $\alpha \geq 1$ et que γ rende positive la fonction $\varphi(u)$. La fonction u de t est déterminée par l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{2x^4(y^2 - z^2) + 2y^4(z^2 - x^2) + 2z^4(x^2 - y^2)}{xyz}$$

ou, en introduisant le discriminant de l'équation (1), par

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4\varphi(u).$$

Le changement de variable déterminé par l'équation

$$u = \frac{\alpha\beta - v}{4}$$

donne, pour déterminer v, l'équation canonique

$$(2)\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 4v^3 - 12\alpha\beta^2(\alpha + 8)v + 8\alpha\beta^3(\alpha^2 - 20\alpha + 8);$$

comme u doit varier entre les deux plus grandes racines de l'équation (1), v variera entre les plus petites racines e_3 et e_2 du second membre de l'équation (2), et l'on aura

$$v - v_0 = v - \alpha\beta + 4\gamma = p(t + \omega', \omega, \omega') - e_3$$

ou bien

$$u = \gamma - \tfrac{1}{4}\left[e_3 - p(t + \omega', \omega, \omega')\right].$$

Lorsque $\alpha = 1$, $\varphi(u)$ a une racine double $u = \beta$ et une simple $u = -\frac{5}{4}\beta$; il faut que l'on ait constamment $u = \beta = \gamma$, de sorte que x^2, y^2 et z^2 sont des constantes égales à $\frac{\beta}{3}$.

Paris.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2) = 0,$$

où, suivant l'usage, p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles des deux premiers ordres d'une fonction z de x et y

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

On demande de trouver toutes les solutions de cette équation, pour lesquelles z est une fonction de la seule quantité u, en posant

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

II. *Trouver les fonctions z des deux variables x et y satisfaisant à l'équation aux différentielles totales*

$$yz(y+z)\,dx + zx(z+x)\,dy + xy(x-y)\,dz = 0.$$

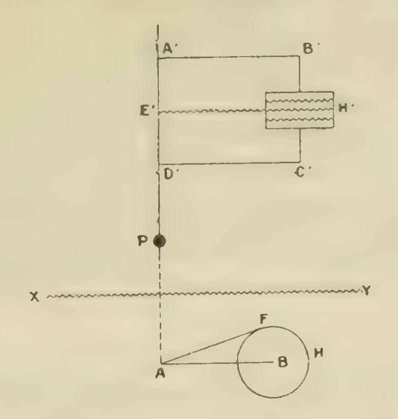
Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^1 x \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un cadre rectangulaire* A′B′C′D′ *formé par quatre tiges rigides invariablement liées entre elles peut tourner autour du côté* A′D′ *supposé vertical et fixe. Une poulie circulaire homogène* H′ *est liée au côté* B′C′ *de façon qu'elle puisse tourner*

librement autour de B'C' *sans glisser le long de ce côté. Autour de cette poulie est enroulé un fil inextensible sans masse, qui est ensuite tendu horizontalement,*



qui passe sur une poulie infiniment petite E' *placée sur le côté* A'D' *et qui pend librement, en portant à son extrémité un point pesant* P *de masse m.*

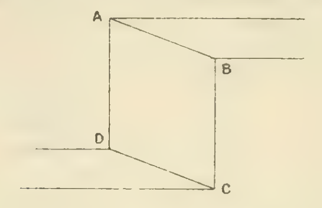
On abandonne le système à lui-même sans vitesses initiales, de telle façon que le point P *tombe le long de la verticale* A'D'. *Trouver le mouvement, en supposant qu'il n'y ait pas de frottements.*

Notations. — *On appellera a la longueur* A'B', R *le rayon de la poulie,* M *sa masse,* I *le moment d'inertie du cadre par rapport à* A'D', θ *et* φ *les angles dont tournent respectivement le cadre et la poulie à partir de leurs positions initiales.*

Dans la figure, on a représenté au-dessous de la ligne de terre XY *la projection horizontale du système:* AB *projection horizontale du cadre,* H *de la poulie,* AF *de la partie horizontale du fil.*

Épreuve pratique. — *Calculer, en kilogrammes, la*

pression de l'eau sur une porte d'écluse verticale rectangulaire, en supposant qu'en amont l'eau affleure

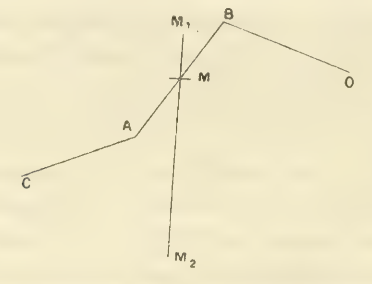


au côté supérieur AB *et en aval au côté inférieur* DC. *Déterminer la position du centre de pression. La largeur* AB *de la porte est* 3^m *et sa hauteur* $AD = 4^m$.

MÉCANIQUE PHYSIQUE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On se propose de construire le dispositif du balancier et du contrebalancier.*

On connaît a priori *la position et la longueur* C *du segment* M_1M_2 *de la verticale que doit décrire approxi-*



mativement le milieu M *de la bielle* AB. *On connaît la longueur* l *de cette bielle et la longueur* a *du balancier et du contrebalancier. Déterminer les points d'articulation* O *et* C *du balancier et du contrebalancier. Dire si les deux solutions que fournit le calcul sont également admissibles.*

On prendra

$$C = 0^m,48 \qquad l = 0^m,48, \qquad a = 0^m,74.$$

Prouver que le point M *décrit la verticale avec une erreur moindre qu'un tiers de millimètre.*

Épreuve pratique — *Deux arbres parallèles* A *et* B, *distants de* 40^{cm}, *portent chacun une roue dentée. Ces deux roues représentent un engrenage du système à développantes de cercles. L'une des roues a* 24 *dents; on demande de trouver le nombre des dents de la seconde, sachant que, la première roue faisant* 80 *tours, la seconde en fait* 120. *Trouver les rayons des circonférences primitives et construire le profil d'une dent de la seconde roue.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Théorie de la réfraction astronomique dans l'hypothèse des couches d'air sphériques et concentriques.*

Développement en série de l'expression de la réfraction.

Détermination expérimentale des coefficients de la série.

Épreuve pratique. — *On a observé, en un lieu de latitude* φ, *l'instant du passage d'une étoile de distance polaire* $\mathfrak{P}$, *au fil moyen d'une lunette méridienne imparfaitement réglée. Le fil n'a pas d'erreur de collimation; l'axe des tourillons est horizontal, mais l'extrémité ouest de cet axe est dévié vers le sud d'un angle* a. *On demande :*

1° *De calculer la réduction au méridien du temps du passage pour le cas suivant :*

$$\varphi = 48^{\circ}.50'.10''.$$
$$\mathfrak{P} = 72.23.20.$$
$$a = 1.10.\ 5.$$

2° *De discuter la valeur de la réduction lorsque la*

distance polaire de l'étoile varie de l'horizon sud à l'horizon nord.

Rennes.

Analyse.

Épreuve écrite. — 1° *Déterminer une fonction analytique sachant que sa partie réelle est une fonction homogène d'ordre m des deux variables x et y ;*

2° *Étant donné un polynome entier de degré m*

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

calculer l'intégrale

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} L(z)\, dz,$$

effectuée à partir d'un point donné, le long d'une circonférence ayant son centre à l'origine des coordonnées et de rayon R *assez grand pour contenir toutes les racines de l'équation* $\varphi(z) = 0$ *ou de rayon* ρ *assez petit pour n'en contenir aucune ; on suppose bien étendu* $\varphi(0) \neq 0$.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (3x + 1)e^x - 2e^{-2x}.$$

Astronomie.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'ascension droite et la déclinaison d'un astre dont les coordonnées écliptiques sont*

Longitude $L = 224^\circ 36' 20'', 00$
Latitude $\lambda = -6^\circ\ 7' 10'', 00$

2° *Corriger après coup les valeurs trouvées sachant que la longitude* L *doit subir une correction de* 1″.

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définition, propriétés et équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface donnée : cas où la surface est réglée.*

II. *Déterminer pour la constante a une valeur réelle, positive, différente de zéro et telle que l'équation différentielle*

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - ay = 2x$$

admette une infinité de solutions qui soient des polynomes entiers.

Trouver pour cette même valeur particulière de a l'intégrale générale de l'équation proposée.

III. *Démontrer que les courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\sqrt{z^2+x+y}-z+1\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\sqrt{z^2+x+y}-z-1\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

sont rectilignes et parallèles au plan

$$x - y - 2z = 0 ;$$

trouver l'intégrale générale de cette équation.

Épreuve pratique. — *a désignant une constante réelle choisie de façon que l'intégrale*

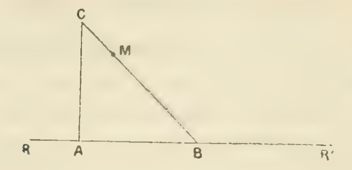
$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{1+x^2}$$

ait un sens, calculer la valeur de cette intégrale.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — I. *Un prisme homogène de masse m, dont la section droite est un triangle rec-*

tangle ABC *repose par une de ses faces rectangulaires sur un plan horizontal fixe* RR' *sur lequel il peut*



glisser sans frottement. Un corps pesant M *de masse* m' *et de dimensions très petites est posé sur la face hypoténusale* BC *du prisme et glisse suivant la ligne de plus grande pente, de sorte que son centre de gravité et celui du prisme soient toujours dans le même plan vertical* ABC. *La pression de* M *sur le prisme fait reculer celui-ci.*

On propose de déterminer la vitesse du corps M, *sa trajectoire, la vitesse de recul du prisme.*

II. *Lorsqu'une figure plane, limitée par une ligne fermée, possède un axe de symétrie* A, *si l'on fait tourner cette figure autour d'un axe parallèle à* A, *le moment d'inertie* I, *relativement à ce dernier axe du corps engendré par l'aire plane considérée après une révolution complète, est égal à* $m(h^2 + 3k^2)$, m *représentant la masse de l'anneau supposé homogène,* h *la distance de l'axe de symétrie de l'aire plane à l'axe de la surface de révolution qui limite le corps,* k *le rayon de gyration de l'aire génératrice relativement à l'axe de symétrie de cette aire.*

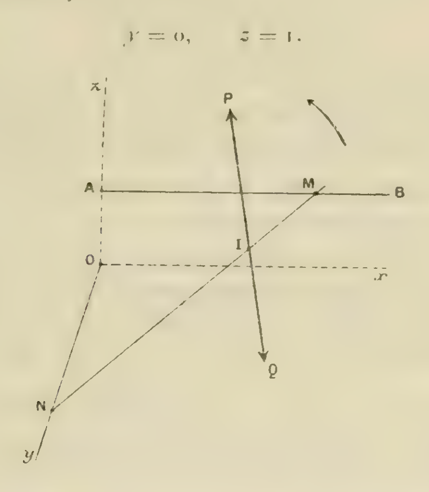
Épreuve pratique. — *Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un arc homogène de spirale logarithmique* ($r = ae^{m\theta}$). *On prendra pour origine des arcs le point où la spirale rencontre l'axe polaire* $r = a$, $\theta = 0$.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

I. *Description sommaire du joint Goubet.*

II. *On donne la droite* AB *définie en coordonnées rectangulaires par*

$$y = 0, \qquad z = 1.$$



et l'on considère le mouvement d'une aiguille MN, *de longueur* a, *dont les extrémités* M *et* N *se déplacent respectivement sur* AB *et* Oy. *Soit*

$$x = f(t)$$

l'équation du mouvement de M *sur* AB.

1° *Montrer qu'à un instant quelconque* t *le mouvement de* MN *est (au point de vue de l'état des vitesses) un mouvement de rotation et déterminer le segment qui représente cette rotation.*

2° *Une seconde aiguille* PQ, *invariablement liée à la première* MN *au point* I, *de manière que l'angle des deux aiguilles soit droit, tourne autour de* MN *(dans le sens de la flèche) d'un mouvement uniforme donné.*

Décomposer d'une manière simple le mouvement du système des deux aiguilles :

1° *En deux rotations;* 2° *en une rotation et une translation.*

Astronomie ou Mécanique céleste.

Épreuve écrite. — *Connaissant, par rapport à l'écliptique et à l'équinoxe moyens d'une date* T, *les éléments de l'orbite d'une planète, déterminer par rapport au même équinoxe l'ascension droite et la déclinaison géocentriques de la planète à une date quelconque t. Constantes de Gauss.*

Emploi de la lunette méridienne pour la détermination des ascensions droites des étoiles. (*On supposera connues les constantes qui définissent la position de l'instrument.*)

Épreuve pratique. — *Une lunette montée équatorialement est installée dans le voisinage d'une colonne verticale. On dirige la lunette sur le sommet de la colonne et l'on constate que :*

1° *L'angle horaire est* 2^h;

2° *La distance polaire est* 120°;

3° *L'œilleton de l'oculaire de la lunette est à* 60^m *du centre du pied de la colonne et dans le même plan horizontal.*

La latitude du lieu d'observation est 46°.

On demande la hauteur de la colonne.

(*On fera le calcul avec la précision que comportent les Tables à sept décimales.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1896). SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

Par M. E. FOUYÉ,
Agrégé de Mathématiques.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A *dont la circonférence est dépolie.*

I. *Un point pesant* P *est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque* A, *dans le voisinage du point le plus haut du disque* A :

1° *On demande de déterminer l'angle minimum* α *que doit faire le rayon qui passe par le point* P *avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point* P *cesse d'être en équilibre;*

2° *Si le point* P *est placé sur le disque sans vitesse initiale, de manière que le rayon qui passe par le point* P *fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que* α, *le point* P *glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par* P, *lorsque ce point* P *se détache du disque pour tomber librement.*

II. *Sur le disque circulaire* A, *dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant* B *qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque* A. *La circonférence de* B *est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre; on néglige la résistance au roulement. A l'origine, le disque* B *est sans vitesse et le rayon du disque* A *aboutissant au point de contact des deux*

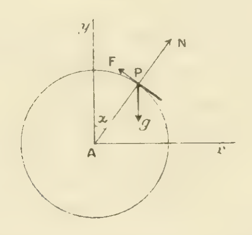
disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu β.

Entre quelles limites doit être compris β *pour que le disque* B *roule d'abord sans glisser sur le disque* A ?

En admettant que le disque B *commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent : 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de* A *qui passe par le centre de* B *à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement ; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque* B *se détache de* A. *Dans les deux questions, on désignera par* f *le coefficient du frottement de glissement.*

I. 1° Prenons pour unité de masse la masse du point P ; en ce point sont appliquées trois forces : le poids g, une force F tangente au cercle et une force

Fig. 1.



normale N. Cherchons à quelles conditions le point P sera en équilibre. En projetant sur la tangente et sur la normale en P les trois forces énoncées précédemment, nous devons avoir

$$F = g \sin\alpha, \qquad N = g \cos\alpha.$$

la somme des moments des forces par rapport au point P est évidemment nulle ; il ne reste plus qu'à écrire l'inégalité

$$F \quad fN \qquad \text{ou} \qquad \tan\alpha \quad f = \tan\varphi.$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \varphi.$$

Donc, dès que l'on aura $\alpha > \varphi$, le point cessera d'ètre en équilibre.

2° Les équations du mouvement du point sont

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha - \mathrm{F}, \qquad \frac{v^2}{\rho} = g\cos\alpha - \mathrm{N}.$$

On a de plus

$$\mathrm{F} = f\mathrm{N}, \qquad v = \rho\alpha' \qquad (\rho, \text{ rayon du disque A}).$$

On peut donc écrire les équations du mouvement

$$\alpha'' = \frac{g}{\rho}\sin\alpha - \frac{f\mathrm{N}}{\rho}, \qquad \alpha'^2 = \frac{g}{\rho}\cos\alpha - \frac{\mathrm{N}}{\rho}.$$

On en déduit par l'élimination de N l'équation

$$\alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha'^2}{d\alpha} - f\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

et, en intégrant,

$$\alpha'^2 = \mathrm{C}e^{2f\alpha} + \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha].$$

Pour déterminer la constante C, remarquons qu'au début du mouvement, on a

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \alpha'_0 = 0.$$

donc

$$0 = \mathrm{C}e^{2f\alpha_0} + \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0].$$

On a donc

$$\alpha'^2 = \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}\Big\{(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha - [(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)}\Big\}.$$

Lorsque le point P se détachera du disque pour tomber librement, on aura

$$N = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations du mouvement,

$$\alpha'^2 = \frac{g}{\rho}\cos\alpha.$$

L'équation demandée est donc

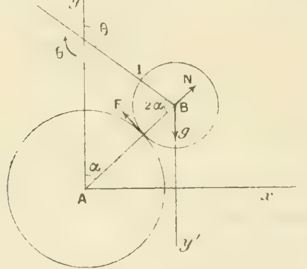
$$\frac{2}{1+4f^2}\Big\{(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha - [(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)}\Big\} = \cos\alpha$$

ou

$$3\cos\alpha + 6f\sin\alpha + 2[(2f^2-1)\cos\alpha_0 - 3f\sin\alpha_0]\,e^{2f(\alpha-\alpha_0)} = 0.$$

II. Soit ρ le rayon du disque B, celui du disque A sera 2ρ; prenons pour unité de masse la masse du

Fig. 2.



disque B; les équations du mouvement du centre (ξ, η) du disque B seront

$$\xi'' = -F\cos\alpha + N\sin\alpha, \qquad \eta'' = F\sin\alpha + N\cos\alpha - g.$$

On a

$$\xi = 3\rho\sin\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \xi'' = 3\rho(\cos\alpha\,\alpha'' - \sin\alpha\,\alpha'^2),$$

$$\eta = 3\rho\cos\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \eta'' = -3\rho(\sin\alpha\,\alpha'' + \cos\alpha\,\alpha'^2).$$

Les équations du mouvement pourront alors s'écrire

$$-F\cos\alpha - N\sin\alpha = 3\rho(\cos\alpha\alpha'' - \sin\alpha\alpha'^2),$$

$$F\sin\alpha + N\cos\alpha - g = -3\rho(\sin\alpha\alpha'' + \cos\alpha\alpha'^2).$$

Multiplions-les par $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et ajoutons, puis par $-\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et ajoutons, nous aurons

(1) $$N - g\cos\alpha = -3\rho\alpha'^2,$$

(2) $$F - g\sin\alpha = -3\rho\alpha''.$$

Le théorème des moments, appliqué à l'axe perpendiculaire au plan du disque B et passant par son centre donne

$$\frac{\rho^2}{2}\theta'' = \rho F \qquad \text{ou} \qquad \rho\theta'' = 2F,$$

θ étant l'angle d'un rayon fixe BI du disque B avec une direction fixe, la verticale descendante. Si le disque B roule sur le disque A, en choisissant convenablement le rayon fixe BI, on aura

$$\theta = 3\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \theta'' = 3\alpha'';$$

par suite, on a

(3) $$3\rho\alpha'' = 2F.$$

Éliminons F entre (2) et (3), on a

$$\alpha'' = \frac{2g}{9\rho}\sin\alpha,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha'^2 = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{9\rho}(\cos\beta - \cos\alpha) \qquad (\beta \text{ valeur initiale de } \alpha).$$

et, par suite,

(4) $$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,t = \int_\beta^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta - \cos\alpha}}.$$

De (2) et (3) on tire

(5) $$F = \frac{g\sin\alpha}{3}.$$

Au début du mouvement, on a

$$\alpha = \beta, \qquad \alpha' = 0\,;$$

l'équation (1) donne

$$N = g \cos \beta,$$

et l'équation (5)

$$F = \frac{g \sin \beta}{3},$$

et, puisqu'il y a roulement, on a nécessairement

$$F \leqq f N,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} \beta \leqq 3 f.$$

Donc β doit être compris entre ε et ω, ω étant tel que $\operatorname{tang} \omega = 3f$, et ε aussi petit que l'on veut, mais $\neq 0$; pour $\varepsilon = 0$, il y a équilibre.

Supposons β ainsi choisi; le mouvement du centre du disque B est alors donné par l'équation (4); on doit avoir

$$\cos \beta > \cos \alpha \qquad \text{ou} \qquad \alpha > \beta,$$

α va donc en augmentant, le radical doit être pris avec le signe $+$.

On a

$$N = g \cos \alpha - 3 \rho \alpha'^2 = \frac{g}{3} (7 \cos \alpha - 4 \cos \beta),$$

$$F = \frac{g \sin \alpha}{3};$$

α allant en augmentant, F augmente et N diminue; il arrivera un moment où l'on aura

$$F = f N,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \sin \alpha - f (7 \cos \alpha - 4 \cos \beta) = 0.$$

Pour $\alpha = \beta$, on a

$$\sin \beta - 3 f \cos \beta < 0, \qquad \text{car} \qquad \operatorname{tang} \beta < 3 f;$$

pour $\alpha = 90°$, on a

$$1 + 4f\cos\beta > 0.$$

Donc l'équation (6) admet une racine β_1 comprise entre β et $90°$.

Le roulement simple sans glissement cessera donc, dès que α atteindra la valeur β_1. A partir de ce moment, les équations du mouvement changent ; ce sont

$$\begin{gathered} N - g\cos\alpha = -3\rho\alpha'^2, \\ F - g\sin\alpha = -3\rho\alpha'', \\ \rho\theta'' = 2F \qquad \text{et} \qquad F = fN. \end{gathered}$$

Éliminons N entre les deux premières, où l'on a remplacé F par fN, nous aurons

$$(7) \qquad \alpha'' - f\alpha'^2 = \frac{g}{3\rho}(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

d'où

$$\alpha'^2 = Ce^{2f\alpha} + \frac{2g}{3\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\alpha - 3f\sin\alpha].$$

Pour déterminer la constante C, écrivons que pour $\alpha = \beta_1$

$$\alpha'^2 = \frac{4g}{9\rho}(\cos\beta - \cos\beta_1).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} &\frac{4g}{9\rho}(\cos\beta - \cos\beta_1) \\ &\quad = Ce^{2f\beta_1} + \frac{2g}{3\rho(1+4f^2)}[(2f^2-1)\cos\beta_1 - 3f\sin\beta_1], \end{aligned}$$

avec

$$\sin\beta_1 = f(7\cos\beta_1 - 4\cos\beta).$$

L'équation (7) montre que le centre du disque B se meut comme un point pesant placé sur un disque concentrique à A, de rayon 3ρ, la pesanteur et le coefficient de frottement restant les mêmes.

On a

$$\theta'' = \frac{2F}{\rho} = \frac{2fN}{\rho} = 2f\left(\frac{g}{\rho}\cos\alpha - 3\alpha'^2\right),$$

$$\theta'' = 6f\left[\frac{g}{\rho(1+4f^2)}(\cos\alpha + 2f\sin\alpha) - Ce^{2f\alpha}\right],$$

$$F = \frac{\rho\theta''}{2}, \qquad N = \frac{\rho\theta''}{2f}.$$

Le disque B quittera le disque A lorsque N s'annulera, c'est-à-dire lorsque θ'' s'annulera; l'angle α correspondant sera donné par l'équation

$$\frac{g}{\rho(1+4f^2)}(\cos\alpha + 2f\sin\alpha) - Ce^{2f\alpha} = 0.$$

QUESTIONS.

1797. Intégrer l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1} x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + x^n y = 0.$$

les coefficients sont ceux de la formule du binome, en sorte que l'on peut écrire symboliquement

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^n y = 0.$$

(H. Laurent.)

1798. Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle abc, passe par un point fixe.

(Mannheim.)

1799. Trouver toutes les courbes qui sont homothétiques à leurs développées. (M. d'Ocagne.)

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898.

Note.

Aucun travail relatif à ce Concours n'est parvenu à la Rédaction dans les délais prescrits. En conséquence, et d'après les conditions générales (reproduites p. 486 du dernier Volume), les avantages indiqués seront reportés sur le deuxième concours pour 1898. Il reste cependant bien entendu qu'un seul Mémoire sera inséré dans le Journal.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS, A PARIS, EN 1900.

La Société Mathématique de France a constitué un Comité d'organisation, en vue du Congrès de Paris. Le bureau de ce Comité est celui de la Société Mathématique. Il a été décidé que la date du Congrès serait fixée du 6 au 12 août 1900, inclusivement, et que l'on sollicitera le rattachement à l'Exposition universelle, ce qui n'empêchera nullement, du reste, de tenir des séances en dehors des locaux de l'Exposition.

Le Comité d'organisation s'est divisé en deux Commissions, dénommées *Commission des travaux scientifiques* et *Commission administrative*.

La Commission des travaux a pour président M. Poincaré; pour vice-présidents MM. Appell et Picard; pour secrétaire M. Raffy.

La Commission administrative a pour président M. Darboux; pour vice-présidents MM. Haton de la Goupillière et Vicaire; pour secrétaires MM. Duporcq et Laisant; pour trésorier M. Désiré André. Nous croyons savoir cependant que ce dernier, en raison de son état de santé et de ses nombreuses occupations professionnelles, insiste pour être remplacé dans les fonctions où l'avait appelé à l'unanimité la confiance de ses collègues.

Nous rappelons que le président de la Société Mathématique actuellement en exercice est M. Lecornu, qui, par cela même, est aussi président du Comité d'organisation, et que le siège du Comité et des deux Commissions est celui de la Société Mathématique, 7, rue des Grands-Augustins. C'est là que doivent être adressées toutes les communications concernant le Congrès international de 1900.

[O6aα]

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

Par M. Geminiano PIRONDINI,
Professeur à l'Institut technique, à Parme.

I.

Soient Σ une surface de révolution dont l'axe est sur l'axe des z, L une ligne quelconque et Λ la projection orthogonale de L sur la surface Σ. Si

$$A[x(t), y(t), z(t)], \quad A_1[\xi(u), \eta(u), \zeta(u)]$$

sont deux points correspondants des lignes L, Λ, les

équations

$$(1)\quad (x-\xi)\frac{d\xi}{du}+(y-\eta)\frac{d\eta}{du}+(z-\zeta)\frac{d\zeta}{du}=0,\quad x\eta-y\xi=0$$

expriment évidemment que la droite AA_1 est normale à Σ. En posant

$$(2)\qquad \xi=\rho\cos u,\qquad \eta=\rho\sin u,\qquad \zeta=U,$$

les conditions (1) deviennent

$$(3)\qquad \sqrt{x^2+y^2}\,\rho'=\rho\rho'+UU'-zU';\qquad \operatorname{tang} u=\frac{y}{x}.$$

Si la ligne méridienne de Σ est représentée par l'équation

$$(4)\qquad \zeta_0=\Phi(\xi_0),$$

la première équation (3) est à remplacer par l'autre :

$$(5)\qquad z\Phi'(\rho)+\sqrt{x^2+y^2}=\rho+\Phi(\rho)\,\Phi'(\rho).$$

Quand la surface Σ et la ligne L sont données d'avance, on peut éliminer un des paramètres t, u entre la deuxième équation (3) et l'équation (5). On obtient ainsi ρ en fonction de u ou de t respectivement, ce qui [en vertu des équations (2)] équivaut à la détermination de A.

Quand la ligne L est placée sur le plan $z=0$ et que

$$(6)\qquad R=f(u)$$

est son équation polaire, la détermination de A est ramenée à la résolution de l'équation

$$(7)\qquad f(u)=\rho+\Phi(\rho)\,\Phi'(\rho)$$

par rapport à ρ.

Exemples. — 1° Si Σ est un cône de révolution dont θ est le demi-angle au sommet, pour la détermina-

tion de A il suffit de faire

$$\rho = (z\cos\theta + \sqrt{x^2 + y^2}\sin\theta)\sin\theta, \qquad \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dans les équations (2).

En supposant

$$z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} - \beta, \qquad R = f(u) = m e^{nu},$$

on trouve

$$\rho = m(\alpha\cos\theta + \sin\theta)\sin\theta e^{mu} - \beta\sin\theta\cos\theta.$$

On a donc ce théorème :

Si une hélice cylindro-conique, placée sur le cône de révolution Σ', *est projetée sur un autre cône* Σ *ayant le même axe que* Σ', *on obtient une ligne* Λ *dont la projection équatoriale est une conchoïde* [1] *d'une spirale logarithmique par rapport au pôle de cette courbe.*

Quand les cônes Σ, Σ' ont le même sommet $(\beta = 0)$, la ligne Λ est elle-même une hélice cylindro-conique.

2° Si la méridienne de Σ est la courbe de troisième ordre

$$\zeta_0 = \sqrt{m\xi_0^3 + n\xi_0^2 + p\xi_0 + q}$$

et si L est la ligne plane (6), on a

$$3m\rho^2 + 2(n+1)\rho + p - 2f(u) = 0,$$

d'où il suit

$$\rho = -\frac{n+1}{3m} \pm \frac{1}{3m}\sqrt{(n+1)^2 - 3mp + 6mf(u)}$$

et la détermination de A n'offre aucune difficulté.

---

[1] On appelle *conchoïde* d'une courbe C par rapport au point A la courbe C′ qu'on obtient en augmentant d'une quantité constante les rayons vecteurs de la ligne C issus du point A.

En supposant successivement $m = 0$; $m = 0$, $n = 0$; $m = 0$, $p = 0$, on arrive à des théorèmes qui sont contenus dans ceux du § III.

II.

Si la ligne méridienne de la surface S engendrée par la rotation de L autour de l'axe des z est représentée par l'équation

$$z_0 = F(x_0),$$

on a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R, \qquad z = F(R),$$

et la condition (5) donne

$$(8) \qquad \rho - R + [\Phi(\rho) - F(R)]\,\Phi'(\rho) = 0.$$

Si, au contraire, les lignes méridiennes des surfaces Σ, S sont représentées par les équations

$$\xi_0 = \Psi(\zeta_0), \qquad x_0 = P(z_0),$$

la première condition (3) donne

$$(9) \qquad \zeta - z + [\Psi(\zeta) - P(z)]\,\Psi'(\zeta) = 0.$$

Il s'ensuit que *les rayons vecteurs* R, ρ *sont liés par une relation finie et les hauteurs correspondantes* z, ζ *sont liées par une autre relation finie. Ces relations dépendent seulement de la nature des surfaces* Σ, S.

Si, par exemple, Σ est un cône ayant son sommet à l'origine $[\Phi(\xi_0) = \alpha\xi_0]$ et si S est un paraboloïde

$$\left[F(x_0) = \frac{x_0^2}{a}\right],$$

les relations dont on vient de parler sont

$$R + \frac{\alpha}{a} R^2 = (1 + \alpha^2)\rho; \qquad z + \frac{1}{\alpha}\sqrt{az} = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\zeta.$$

Quand on donne d'avance la relation

$$(10) \qquad R = \lambda(\rho)$$

entre les rayons vecteurs R, ρ, ou bien la relation

$$z = L(\zeta) \tag{11}$$

entre les hauteurs z, ζ, les équations (8), (9) peuvent s'écrire

$$F[\Lambda(\rho)] = \Phi(\rho) - \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)}, \tag{12}$$

$$P[L(\zeta)] = \Psi(\zeta) - \frac{\zeta - L(\zeta)}{\Psi'(\zeta)}, \tag{13}$$

et l'on peut déterminer Σ ou S quand on donne respectivement S ou Σ.

Dans le premier cas, la détermination de la méridienne de Σ est ramenée à l'intégration d'une des équations différentielles (12), (13).

Dans le deuxième cas, après avoir remplacé ρ dans le deuxième membre de l'équation (12), ou ζ dans le deuxième membre de l'équation (13) par les valeurs qu'on déduit des équations (10), (11), on obtient

$$F = \mu(R), \qquad P = \nu(z),$$

μ, ν désignant deux fonctions connues. D'après cela, la méridienne de S est la courbe représentée par une des équations

$$z_0 = \mu(x_0), \qquad x_0 = \nu(z_0).$$

Exemples. — 1° Si S est un cône $[F(x_0) = \alpha x_0 + \beta]$ et R, ρ sont liés par la relation

$$R = \Lambda(\rho) = \rho - a,$$

la méridienne de Σ est la courbe

$$\log\left(\alpha\xi_0 - \zeta_0 + a\alpha + \beta + \frac{a}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{a}(\alpha\xi_0 - \zeta_0 + a\alpha - \beta) + \frac{\alpha^2}{a}\xi_0 = c,$$

c étant une constante arbitraire.

2° Si la méridienne de Σ est la parabole $\xi_0 = \frac{\zeta_0^2}{m}$ et

z, ζ sont liés par la relation

$$z = \mathrm{L}(\zeta) = \sqrt{a\zeta\zeta},$$

la méridienne de S est la ligne du cinquième ordre

$$x_0 = \frac{z_0^4}{a^2 m} + \frac{m(z_0 - a)}{2 z_0}.$$

L'équation (7) démontre que : *Lorsque la ligne* L *est tracée sur le plan coordonné* $z = 0$, *les rayons vecteurs* R, ρ *sont liés par la relation*

$$\mathrm{R} = \rho + \Phi(\rho)\,\Phi'(\rho).$$

Il s'ensuit que, si l'on connaît d'avance la relation (10) entre R, ρ, on a

$$\Phi^2(\rho) = 2\int \Lambda(\rho)\,d\rho - \rho^2 + c,$$

c étant une constante arbitraire.

Dans ce cas, *la ligne méridienne de* Σ *est représentée par l'équation*

$$\zeta_0 = \sqrt{2\int \Lambda(\xi_0)\,d\xi_0 - \xi_0^2 + c}.$$

Si, par exemple, $\mathrm{R} = \Lambda(\rho) = a\rho^m$, la méridienne de Σ est la ligne

$$\zeta_0^2 = \frac{2a}{m+1}\,\xi_0^{m+1} - \xi_0^2 + c.$$

Pour $m = 1$, L est une ligne homothétique à la projection équatoriale de Λ, et Σ est une surface du deuxième ordre à centre (*voir* le § IV).

III.

Quand les rayons vecteurs R, ρ sont liés par la relation (10) et les hauteurs z, ζ par la relation (11), la première condition (3) donne

$$(14) \qquad \mathrm{U}\mathrm{U}' + \rho\rho' + \mathrm{U}'\mathrm{L}(\mathrm{U}) - \rho'\Lambda(\rho) = 0$$

Il s'ensuit que : *La méridienne de la surface Σ est la courbe représentée par l'équation*

$$(15) \qquad \zeta_0^2 + \xi_0^2 - 2\int L(\zeta_0)\,d\zeta_0 - 2\int \Lambda(\xi_0)\,d\xi_0 = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Si l'on donne la surface Σ et la relation (11), l'équation (14) démontre que les rayons vecteurs R, ρ sont liés par la relation

$$\Lambda(\rho) = R = \rho + \Phi(\rho)\Phi'(\rho) - \Phi'(\rho)L[\Phi(\rho)].$$

Si, au contraire, on donne Σ et la relation (10), l'équation (14) peut s'écrire

$$(16) \qquad L[\Phi(\rho)] = \Phi(\rho) + \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)}.$$

Et puisque, en résolvant l'équation

$$\Phi = \Phi(\rho),$$

par rapport à ρ, le deuxième membre de l'équation (16) se réduit à une fonction connue $\theta(\Phi)$ de Φ, on voit que les hauteurs z, ζ sont liées par la relation

$$z = \theta(\zeta).$$

Supposons que les rayons vecteurs R, ρ soient liés par la relation

$$(17) \qquad R = m\rho + n,$$

et les hauteurs z, ζ par l'autre relation

$$(18) \qquad z = k\zeta + h.$$

L'équation (15) démontre que la ligne méridienne de Σ est la conique

$$(19) \qquad (1-k)\zeta_0^2 + (1-m)\xi_0^2 - 2h\zeta_0 - 2n\xi_0 = c.$$

Si l'on suppose, au contraire, que la ligne méridienne

de Σ soit la conique

(20) $$A\zeta_0^2 + B\xi_0^2 + 2C\zeta_0 + 2D\xi_0 + E = 0,$$

et qu'il subsiste la relation (17), ou bien l'autre (18), les considérations qu'on vient d'exposer conduisent au théorème suivant :

Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L *sur une surface de révolution* Σ, *on énonce les trois conditions : 1° Les hauteurs* z, ζ *sont liées par une relation linéaire* (18); *2° les rayons vecteurs* R, ρ *des projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont liés par une relation linéaire* (17); *3° la ligne méridienne de* Σ *est la conique représentée par l'équation* (20), *les coefficients* A, B, C, D *vérifiant les conditions*

(21) $$Ah + C(1-k) = 0, \qquad Bn + D(1-m) = 0,$$

deux de ces conditions entraînent nécessairement la troisième. La ligne L, *dans la rotation autour de l'axe des* z, *engendre une surface dont la courbe méridienne est la conique*

$$\frac{A}{k^2}(z_0-h)^2 + \frac{B}{m^2}(x_0-n)^2 + \frac{2C}{k}(z_0-h) + \frac{2D}{m}(x_0-n) + E = 0.$$

Cas particuliers. — Dans l'équaion (20) supposons successivement

$$h = 0, \quad n = 0; \quad h = 0, \quad m = 1;$$
$$k = 1, \quad n = 0; \quad k = 1, \quad m = 1,$$

et comparons ensuite les équations qu'on va obtenir à l'équation (20). On a respectivement :

$$C = 0, \quad D = 0; \quad B = 0, \quad C = 0;$$
$$A = 0, \quad D = 0; \quad A = 0, \quad B = 0,$$

ce qui démontre que les conditions (21) sont vérifiées par identité.

On a donc les théorèmes :

Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L *sur une surface de révolution* Σ, *on énonce les conditions :*

A. 1° *Les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles;* 2° *les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont deux courbes homothétiques par rapport à l'origine:* 3° *la surface* Σ *est du deuxième ordre à centre;*

B. 1° *Les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles;* 2° *une des projections équatoriales des lignes* L, Λ *est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *a pour méridienne une parabole ayant son axe sur l'axe des* x;

C. 1° *Les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante;* 2° *les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont deux lignes homothétiques par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *est un paraboloïde;*

D. 1° *Les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante;* 2° *une des projections équatoriales des lignes* L, Λ *est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *est un cône;*

Deux conditions de A, B, C, D *entraînent nécessairement la troisième. La ligne* L, *tournant autour de l'axe des* z, *engendre une surface* S *de la même nature que* Σ.

En appliquant les théorèmes précédents (A, C), on en déduit la proposition suivante :

Quand les lignes L, Λ *sont placées sur deux plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe des* z :

1° *Si les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles,* Σ *et* S *sont deux surfaces du deuxième ordre à centre* (L *et* Λ *sont deux ellipses ou deux hyperboles*); *et vice versa:*

2° *Si les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante,*

les surfaces Σ, S *sont deux paraboloïdes* (L *et* Λ *sont deux paraboles*); *et* vice versa.

IV.

Si, dans la première équation (3), on suppose successivement : $z = k\zeta = kU$, $z = 0$, on obtient après l'intégration

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}}\sqrt{2\int R\rho'\,du - \rho^2 + m},$$

$$\zeta = \sqrt{2\int R\rho'\,du - \rho^2 + n},$$

m, n étant des constantes arbitraires. En supposant $m = n$, on a cet énoncé :

Lorsque les hauteurs z, ζ *sont proportionnelles* ($z = k\zeta$), *si une ligne* L_p *et sa projection équatoriale* L_0 *sont projetées sur les surfaces* Σ_p, Σ *suivant les lignes* Λ_p, Λ *ayant la même projection équatoriale* Λ_0, *on a entre les hauteurs* ζ_p, ζ *la relation*

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}}\zeta.$$

En vertu de ce théorème, à chaque propriété relative au cas où z, ζ sont proportionnelles, correspond une autre propriété relative au cas où L est sur le plan $z = 0$; et *vice versa*.

Par exemple, les propriétés A et B du § III conduisent au théorème que voici :

Quand la ligne primitive L *est sur le plan* $z = 0$:

1° *Si cette ligne est homothétique à la projection équatoriale de* Λ, Σ *est une surface de deuxième ordre à centre; et* vice versa (*voir* le dernier théorème du § II);

2° *Si cette ligne est une conchoïde de la projection*

équatoriale de Λ, Σ *a pour méridienne une parabole ayant l'axe sur l'axe des* x; *et* vice versa.

Le premier de ces théorèmes conduit à la propriété suivante : *Quand la ligne primitive* L *est une droite du plan* $z = 0$ *et que* Λ *est sur un plan parallèle à l'axe des* z *et à la droite* L, Σ *est une surface du deuxième ordre à centre* (Λ *est une ellipse ou une hyperbole*); *et* vice versa.

En considérant les lignes Λ, L définies par les équations

$$\xi = \rho\cos u, \qquad \eta = \rho\sin u, \qquad \zeta = \mathrm{U};$$
$$x = \mathrm{R}\cos u, \qquad y = \mathrm{R}\sin u, \qquad z = z(u),$$

et les lignes Λ_1, L_1 définies par les autres équations

$$\xi_1 = \rho_1\cos u = (\rho + k)\cos u, \qquad \eta_1 = \rho_1\sin u = (\rho + k)\sin u,$$
$$\zeta_1 = \mathrm{U},$$
$$x_1 = \mathrm{R}_1\cos u = (\mathrm{R} + k)\cos u, \qquad y_1 = \mathrm{R}_1\sin u = (\mathrm{R} + k)\sin u,$$
$$z_1 = z(u),$$

on trouve que les conditions

$$\mathrm{R}\rho' = \rho\rho' + \mathrm{U}\mathrm{U}' - z\mathrm{U}', \qquad \mathrm{R}_1\rho'_1 = \rho_1\rho'_1 + \mathrm{U}\mathrm{U}' - z\mathrm{U}'$$

reviennent l'une à l'autre. On a donc ce théorème :

Si l'on augmente les rayons vecteurs des projections équatoriales des deux lignes Λ, L *d'une même quantité constante* k, *sans altérer les hauteurs* ζ, z, *on obtient deux nouvelles lignes* Λ_1, L_1 *telles que, si* Λ *est la projection orthogonale de* L *sur la surface* Σ *engendrée par la rotation de* Λ *autour de l'axe des* z, Λ_1 *est la projection orthogonale de* L_1 *sur la surface* Σ_1 *engendrée par la rotation de* Λ_1.

Ce théorème conduit souvent à des résultats impor-

tants. Si, par exemple, on a recours au dernier théorème du § III et au dernier théorème du § IV, on a cette proposition :

Quand les projections équatoriales des lignes Λ, L *sont deux conchoïdes de* Nicomède *ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles :*

1° *Si les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles, les surfaces* Σ, S *ont pour méridiennes deux coniques à centres ; et* vice versa ;

2° *Si les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante, les surfaces* Σ, S *ont pour méridiennes deux paraboles dont les axes sont parallèles à l'axe des* z ; *et* vice versa.

Quand la ligne primitive L (*placée sur le plan* $z=0$) *et la projection équatoriale de* Λ *sont deux conchoïdes de* Nicomède *ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles, la surface* Σ *a pour méridienne une conique à centre; et* vice versa.

V.

Admettons que les projections équatoriales L_0, Λ_0 des lignes L, Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection. On doit avoir

$$(22)\qquad x = a + k(\xi\cos\varepsilon - \eta\sin\varepsilon),\quad y = b + k(\xi\sin\varepsilon + \eta\cos\varepsilon),$$

a, b, h, ε étant des constantes; et les conditions fondamentales (1) donnent les équations

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & z - \zeta = \frac{(k\cos\varepsilon - 1)(\xi\xi' + \eta\eta') - k\sin\varepsilon(\xi'\eta - \xi\eta') + a\xi' + b\eta}{\zeta'}, \\ & k\sin\varepsilon(\xi^2 + \eta^2) - a\eta + b\xi = 0. \end{aligned} \right.$$

d'où, par l'application des égalités (22), on dérive

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &k^2(z\zeta' - \zeta z') = (1 - k\cos\varepsilon)(xx' + yy') \\ &\qquad\qquad + k\sin\varepsilon(x'y - xy') - ax' - by', \\ &\sin\varepsilon(x^2 + y^2) - (a\sin\varepsilon + b\cos\varepsilon)x \\ &\qquad\qquad - (a\cos\varepsilon - b\sin\varepsilon)y = 0. \end{aligned}\right.$$

Il suit que les lignes Λ, L sont sur deux cylindres circulaires Γ, G contenant l'axe des z.

Si l'on trace Λ sur le cylindre Γ d'une manière arbitraire, L est définie par les équations (22) et par la première équation (23). Si l'on part, au contraire, de la ligne L, la détermination de Λ exige l'intégration de la première équation (24).

Quand L est sur le plan $z = 0$, cette courbe est le cercle représenté par la deuxième équation (24) et la ligne Λ est définie par les égalités

$$\eta = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4k\sin\varepsilon(b\xi - k\sin\varepsilon\,\xi^2)}}{2k\sin\varepsilon},$$

$$\zeta^2 = 2a\xi - 2b\eta + (k\cos\varepsilon - 1)(\xi^2 - \eta^2) - 2k\sin\varepsilon \int \left(\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}\right)d\xi + m,$$

m étant une constante arbitraire.

Supposons que la ligne primitive L et sa projection orthogonale Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection.

En supposant que L, Λ puissent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation ε autour de l'axe des z et une translation arbitraire, on a les équations (22) et cette autre :

$$(25)\qquad z = c - k\zeta,$$

c étant une constante. En éliminant z entre les équa-

tions (23), (25) et ζ entre les équations (24), (25), on obtient après l'intégration

$$= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4k \sin\varepsilon (b\zeta + k \sin\varepsilon \zeta^2)}}{2k \sin\varepsilon},$$

$$-k)\zeta^2 - 2c\zeta$$
$$= 2a\zeta + 2b\eta + (k\cos\varepsilon - 1)(\zeta^2 + \eta^2) - 2k\sin\varepsilon \int \left(\eta - \zeta \frac{d\eta}{d\zeta}\right) d\zeta + m,$$

$$= \left\{ \frac{a\cos\varepsilon + b\sin\varepsilon \pm \sqrt{(a\cos\varepsilon + b\sin\varepsilon)^2 - 4\sin\varepsilon[(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)x + \sin\varepsilon x^2]}}{2\sin\varepsilon} \right\},$$

$$-k)z^2 - 2cz$$
$$= 2ax + 2by + (k\cos\varepsilon - 1)(x^2 + y^2) - 2k\sin\varepsilon \int \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx + n.$$

m, n étant des constantes arbitraires.

Les lignes Λ, L sont donc, à une constante près, définies entièrement ; les projections équatoriales de ces lignes sont deux cercles passant à l'origine des axes.

Remarque. — L'hypothèse $k = 1$ correspond à l'égalité des lignes L_0, Λ_0 ou de L, Λ.

VI.

Que les projections équatoriales L_0, Λ_0 des lignes L, Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées d'une façon quelconque, on peut passer de Λ_0 à L_0 après les opérations suivantes : la réduction des coordonnées dans un rapport constant (k) ; une rotation (ε) de la ligne dérivée autour d'un point arbitraire de son plan (l'origine) ; une translation convenable (a) de la courbe nouvelle L_1 suivant une certaine direction (l'axe des x).

Si A, B, C sont les points où Λ_0, L_1, L_0 sont coupées par un rayon vecteur quelconque, incliné de l'angle u sur l'axe des x et D est le point où L_0 est coupée par

une droite parallèle à l'axe des x menée par B, on a

$$BD = a, \qquad OA = \rho = \varphi(u),$$

$$OB = \rho_1 = k\varphi(u + \varepsilon), \qquad \cot \widehat{DOX} = \cot u + \frac{a}{\rho_1 \sin u},$$

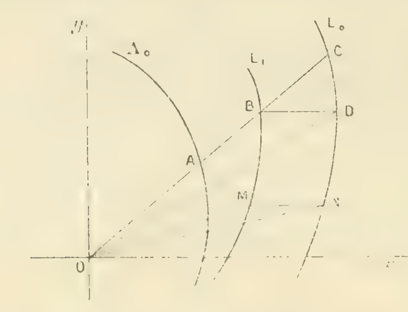
$$OD = \sqrt{\rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos u + a^2}.$$

Si donc $u = \theta(\omega)$ est une solution de l'équation

$$(26) \qquad \cot u + \frac{a}{k\varphi(u + \varepsilon)\sin u} = \cot \omega,$$

on a

$$OD = \sqrt{k^2\varphi^2[\theta(\omega) + \varepsilon] - 2ak\varphi[\theta(\omega) + \varepsilon].\cos[\theta(\omega)] + a^2}.$$



En posant $OC = R$ et en remarquant que u est l'angle polaire du point C, on a

$$(27) \quad R = \sqrt{k^2\varphi^2[\theta(u) + \varepsilon] + 2ak\varphi[\theta(u) + \varepsilon].\cos[\theta(u)] + a^2}$$

et la détermination des lignes L, Λ et de la surface Σ n'offre aucune difficulté.

Quand L est sur le plan $z = 0$, (27) est son équation polaire et la ligne Λ est représentée par les équations

$$\xi = \varphi(u)\cos u,$$
$$\eta = \varphi(u)\sin u,$$
$$\zeta = \sqrt{2\int R\varphi'(u)\,du - \varphi^2(u) + c}$$

c étant une constante arbitraire.

Supposons que la ligne primitive L et sa projection orthogonale Λ soient deux courbes semblables (ou égales) placées d'une façon quelconque.

Ces lignes peuvent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation ε autour de l'axe des z (c'est un cas particulier) et une translation suivant une direction donnée, qu'on peut supposer parallèle au plan $y=0$, sans nuire à la généralité.

Si, de plus, cette translation est décomposable, suivant Ox, Oz, en les translations a, b, on peut appliquer les formules de ce paragraphe. Dans la figure précédente A, M sont deux points des courbes Λ_0, L_0 choisis de façon que

$$\mathrm{OA}=\rho, \qquad \mathrm{OM}=k\rho.$$

Si du point M on mène une droite parallèle à l'axe des x, coupant L_0 au point N, on a

$$\cot\widehat{\mathrm{NOX}}=\cot w=\cot(u-\varepsilon)+\frac{a}{k\rho.\sin(u+\varepsilon)}$$

et, conséquemment,

$$(28)\qquad w=\operatorname{arccot}\left\{\cot(u-\varepsilon)+\frac{a}{k\varphi(u).\sin(u+\varepsilon)}\right\}.$$

La hauteur de L en N s'obtient par la première équation (3), en remplaçant z et u par $z-b$ et w; la hauteur de Λ en A est $\mathrm{U}(u)$. La condition exprimant que ces hauteurs ont le rapport constant k est donc

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi(w)-\sqrt{k^2\varphi^2[\theta(w)+\varepsilon]+2ak.\varphi[\theta(w)+\varepsilon].\cos[\theta(w)]+a}}{\mathrm{U}'(w)}\\&\times\varphi'(w)+\mathrm{U}(w)+b=k.\mathrm{U}(u),\end{aligned}\right.$$

w étant donnée par l'équation (28).

En résumé, on a $\rho=\varphi(u)$; R est donné par l'équa-

tion (27) et la forme de la fonction $U(u)$ doit être déterminée après l'équation (29).

VII.

Le lieu des projections d'un point fixe P ou d'une ligne fixe L sur une surface de révolution Σ, variable ou invariable, mobile dans l'espace suivant une loi quelconque est respectivement une ligne L_1 ou une surface S_1 jouissant de nombreuses propriétés. Nous nous bornerons ici à considérer le cas où Σ, invariable de forme, se déplace de façon à conserver son axe parallèle à une direction donnée.

Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point A d'une ligne A placée sur la surface Σ à l'instant initial sont données par les équations ([illegible]); les coordonnées x_1, y_1, z_1 du même point A à un autre instant quelconque sont

$$x_1 = \xi + \lambda(v), \qquad y_1 = \eta + \mu(v), \qquad z_1 = \zeta + \nu(v),$$

λ, μ, ν désignant des fonctions d'un paramètre v indépendant de u.

Si dans cette position le point $A(x_1, y_1, z_1)$ de Σ est correspondant au point $B(x, y, z)$ de la figure primitive F, on a pour conditions d'orthogonalité de la droite BA sur la surface Σ :

$$\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2} = \frac{\rho\rho' + UU' - (z-\nu)U'}{\rho'},$$

$$\operatorname{tang} u = \frac{y-\mu}{x-\lambda}.$$

Il s'ensuit que le lieu demandé est défini par les équations

$$x_1 = \frac{\rho(x-\lambda)}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}} + \lambda,$$

$$y_1 = \frac{\rho(y-\mu)}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}} + \mu,$$

$$z_1 = U + \nu.$$

Dans le cas particulier dans lequel la surface Σ se déplace suivant l'axe, on peut faire $\lambda(\nu) = \mu(\nu) = 0$, $\nu(\nu) = \nu$, ce qui donne

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ y_1 &= \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ z_1 &= z - \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-\rho)\rho'}{1}. \end{aligned}\right.$$

La figure primitive est un point P. — Puisqu'on peut supposer $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ sans nuire à la généralité, on en déduit

$$x_1 = \rho, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = \frac{a-\rho}{\Phi'(\rho)},$$

d'où, en éliminant ρ,

$$(31)\qquad z_1 = \frac{a - x_1}{\Phi'(x_1)}.$$

Telle est l'équation qui définit la ligne L_1, quand on donne le point P et la surface Σ.

Soit donnée *a priori* la ligne L_1 et soit

$$(32)\qquad z_1 = \Omega(x_1)$$

son équation. En comparant les égalités (31), (32), on a l'équation

$$(33)\qquad \Omega(x_1)\Phi'(x_1) + x_1 = a,$$

qu'on peut employer pour la détermination du point P, lorsque L_1 et Σ sont données d'avance.

On obtient par l'équation (33)

$$\Phi(x_1) = \int \frac{a - x_1}{\Omega(x_1)}\, dx_1;$$

il s'ensuit que, lorsque le point P et la ligne L_1 sont connus, la ligne méridienne de Σ est représentée par

l'équation

$$(34) \qquad \zeta_0 = \int \frac{(a-\xi_0)\,\xi_0}{\Omega(\xi_0)}\,d\xi_0.$$

Exemples. — 1° Quand la surface mobile Σ est un paraboloïde $\left[\zeta_0 = \Phi(\xi_0) = \frac{\xi_0^2}{k}\right]$ et la ligne L_1 est l'hyperbole équilatère

$$(35) \qquad z_1 x_1 = \alpha x_1 + \beta,$$

l'égalité (33) nous fournit les conditions

$$\frac{2\alpha}{k} + 1 = 0, \qquad a = \frac{2\beta}{k},$$

dont la deuxième fixe la position du point P.

2° Soient L_1 l'hyperbole équilatère (35) et $P(a, 0, 0)$ le point fixe.

L'équation (34) démontre que la surface Σ a pour méridienne la courbe

$$\zeta_0 = -\frac{1}{2\alpha}\xi_0^2 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha} + a\right)\xi_0 - \frac{\beta}{\alpha^2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + a\right)\log(\alpha\xi_0 + \beta).$$

Parmi ces surfaces Σ il y a évidemment le paraboloïde

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + a = 0\right).$$

VIII.

La figure primitive est une ligne L. — La détermination de la surface S_1, lorsque L et Σ sont données d'avance, se fait à l'aide des équations (30).

Si, par exemple, Σ est un paraboloïde $\left(U = \frac{\rho^2}{k}\right)$ et si L est la droite $x = a$, $z = 0$, le lieu S_1 est la surface réglée du deuxième degré

$$2x_1 z_1 - k z_1 = ak.$$

Si la surface S_1 est donnée *a priori* et si

$$M(x_1, y_1, z_1) = 0$$

est son équation, on en déduit

$$(36)\qquad M\left[\frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z+\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\rho}{\Phi'(\rho)}\right] = 0.$$

Quand (Σ, S_1) ou bien (L, S_1) sont données d'avance, la détermination de L ou de Σ se fait en posant la condition que l'égalité (36) soit vérifiée quel que soit ρ, ou bien quelle que soit la valeur du paramètre t en fonction duquel on a exprimé x, y, z. Pour la possibilité du problème, on doit avoir :

Dans le premier cas, deux équations entre x, y, z : celles-ci définissent la ligne L.

Dans le deuxième cas, une seule équation entre ρ, ρ', U' ; l'intégration d'une telle équation résout le problème.

Exemples. — 1° La surface mobile Σ est un cône $[\zeta_0 = \Phi(\xi_0) = a\xi_0]$ et la surface S_1 un plan

$$(z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma).$$

L'équation (36) donne

$$z + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} - \gamma = \left(\frac{1}{a} + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\rho,$$

et l'on a les conditions

$$z = \gamma - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},$$

$$(a^2\alpha^2 - 1)x^2 + (a^2\beta^2 - 1)y^2 + 2a^2\alpha\beta\, xy = 0.$$

Celles-ci définissent la ligne L. Ces équations démontrent que : *La projection de L sur le plan $z = 0$ est une conique passant à l'origine des axes et la hauteur z est une fonction linéaire du rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$ d'une telle projection.*

2° L est une droite parallèle au plan $x = 0$ et S_1 la surface représentée par l'équation

$$z_1 = \frac{\alpha y_1}{x_1} + \frac{(\beta x_1 + \gamma)\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_1}.$$

Comme on a $x = k$, $y = \rho$, $z = \rho \cot\theta$, l'équation (36) donne

$$\left(\cot\theta - \frac{\alpha}{k}\right) y - \left(\frac{\rho'}{U'} - \frac{\gamma}{k}\right)\sqrt{x^2 - y^2} - \rho\left(\frac{\rho'}{U'} + \beta\right) = 0.$$

On a donc les conditions

$$\cot\theta - \frac{\alpha}{k} = 0, \qquad \frac{\rho'}{U'} = \frac{\gamma}{k};$$

d'où, par intégration,

$$U = \frac{k}{\gamma}\rho = -\frac{1}{\beta}\rho.$$

Il suit de là

$$\alpha = k\cot\theta, \qquad \frac{\gamma}{\beta} = -k.$$

et la surface de révolution mobile Σ est un cône

$$\left(z_0 = \frac{k}{\gamma}\xi_0\right).$$

[M²4iγ]

SUR LA SURFACE DE L'ONDE;

Par M. LACOUR,
Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

L'équation de la surface de l'onde rapportée à ses troisplans principaux est

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) - (\beta^2 + \gamma^2)\alpha^2 x^2 - (\gamma^2 + \alpha^2)\beta^2 y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 z^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$$

On vérifie sans peine que cette équation peut se mettre sous l'une des trois formes

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\alpha^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\beta^2\gamma^2)\\ +(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)x^2=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\gamma^2\alpha^2)\\ -(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)y^2=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\gamma^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\beta^2)\\ +(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)z^2=0,\end{aligned}$$

dont chacune met en évidence les sections par un plan principal et les points singuliers situés dans ce plan.

Ces formes d'équation permettent aussi de vérifier simplement les propriétés des plans tangents singuliers.

Les plans tangents singuliers perpendiculaires au plan $y=0$ ont pour traces sur ce plan les tangentes communes à l'ellipse et au cercle en lesquels se décompose la trace de la surface de l'onde. Ils ont pour équations

$$Q_1 = kx + k'z - \beta = 0,$$
$$Q_2 = kx - k'z - \beta = 0,$$
$$Q_3 = kx - k'z + \beta = 0,$$
$$Q_4 = kx + k'z + \beta = 0.$$

si l'on pose

$$k^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}.$$

L'équation de l'ensemble de ces quatre plans peut s'écrire

$$Q_1Q_2Q_3Q_4 = (k^2x^2 - k'^2z^2 - \beta^2)^2 - 4\beta^2k'^2z^2 = 0.$$

ou, en remplaçant k^2 et k'^2 par leurs valeurs

$$\begin{aligned}(\gamma^2-\alpha^2)^2Q_1Q_2Q_3Q_4 = [\alpha^2x^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\beta^2-\beta^2(x^2+z^2-\gamma^2)]^2\\ -4\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)z^2.\end{aligned}$$

Il suffit d'ajouter et de retrancher dans la parenthèse

le terme $\beta^2 y^2$ pour mettre en évidence les premiers membres des équations des coniques de section par le plan $y = 0$, savoir :

$$C = x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2,$$
$$\Gamma = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \beta^2 ;$$

on trouve ainsi

$$(\gamma^2 - \alpha^2)^2 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = (\Gamma - \beta^2 C)^2 - 4\beta^2 (\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2) z^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(\gamma^2 - \alpha^2)^2 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = (\Gamma + \beta^2 C)^2 \\ - 4\beta^2 [\Gamma C + (\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2) z^2].$$

On reconnaît dans la dernière parenthèse le premier membre de l'équation de la surface de l'onde et l'on peut alors conclure de l'identité précédente qu'on peut prendre pour équation de cette surface

$$(Q) \qquad \varphi^2 - \lambda Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = 0,$$

en désignant par λ une constante et en posant

$$\varphi = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \beta^2 + \beta^2 (x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2).$$

L'équation (Q) montre que le plan $Q_1 = 0$ coupe la surface suivant une conique comptée deux fois; pour faire voir que cette conique est un cercle il suffit de vérifier que Q_1 est un plan de section circulaire de la quadrique $\varphi = 0$.

Or, on a identiquement

$$\varphi - 2\beta^2 (x^2 + y^2 + z^2) = (\alpha^2 - \beta^2) x^2 + (\gamma^2 - \beta^2) z^2 - \beta^2 (\alpha^2 + \gamma^2),$$

et, comme on a posé

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

on peut écrire

$$\varphi = \beta^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha^2 - \gamma^2] + (\gamma^2 - \alpha^2)(k'^2 z^2 - k^2 x^2) ;$$

au lieu de $k'^2z^2 - k^2x^2$ introduisons Q_1Q_3 en tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned} Q_1Q_3 &= (kx + k'z - \beta)(kx - k'z - \beta) \\ &= k^2x^2 - k'^2z^2 + \beta^2 - 2k\beta x ; \end{aligned}$$

il vient, après réduction,

$$\begin{aligned} \varphi = 2\beta^2(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2) - 2x\beta\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)} \\ - (\gamma^2 - \alpha^2)Q_1Q_3. \end{aligned}$$

On voit alors que la section de φ par le plan $Q_1 = 0$ est sur une sphère; de plus, cette sphère coupe le plan $x = 0$ suivant le cercle

$$y^2 + z^2 - \alpha^2 = 0.$$

Donc *la courbe de contact du plan tangent singulier* $Q_1 = 0$ *est un cercle; ce cercle et le cercle de la surface de l'onde situé dans le plan principal* $x = 0$ *sont sur une même sphère.*

II. On sait que l'on passe de l'équation ponctuelle de la surface de l'onde à l'équation tangentielle de la même surface en remplaçant

$$x,\quad y,\quad z,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

par

$$u,\quad v,\quad w,\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

avec la condition

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha},\qquad \beta' = \frac{1}{\beta},\qquad \gamma' = \frac{1}{\gamma}.$$

On peut alors répéter sur l'équation tangentielle de la surface de l'onde les transformations précédentes ; on en conclura que les cônes tangents aux points singuliers situés dans le plan $y = 0$ sont circonscrits à la quadrique

$$\varphi = \alpha^2u^2 + \beta^2v^2 + \gamma^2w^2 - \gamma^2\beta^2 - \beta^2(u^2 + v^2 + w^2 - \gamma^2).$$

L'équation de la quadrique φ' peut se mettre sous la forme

$$\varphi' = 2\beta'^2(u^2+v^2+w^2-\alpha'^2) - 2u\beta'\sqrt{(\beta'^2-\alpha'^2)(\gamma'^2-\alpha'^2)}$$
$$-(\gamma'^2-\alpha'^2)Q'_1Q'_3 = 0,$$

en désignant par Q'_1, Q'_3 les premiers membres des équations tangentielles de deux points singuliers situés dans le plan $y=0$.

On voit que le cône tangent au point $Q'_1=0$ est circonscrit à une quadrique qui est de révolution autour de Ox et dont l'un des foyers est à l'origine.

On conclut de là que le cône tangent au point Q'_1 admet comme focale la droite joignant son sommet à l'origine, c'est-à-dire la normale au cercle $x^2+z^2=\beta^2$; la seconde droite focale doit être symétrique de la première par rapport à l'axe du cône; c'est donc la normale à l'ellipse $\alpha^2x^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2=0$.

Au lieu de considérer les droites focales du cône tangent on peut considérer les sections circulaires du cône réciproque et l'on retrouve un résultat qui peut, comme on sait, s'établir géométriquement, savoir :

Les plans cycliques du cône des normales en un point singulier, perpendiculaires au plan de symétrie qui passe par ce point, ont pour traces sur ce plan les tangentes à l'ellipse et au cercle, section de la surface par le même plan de symétrie.

III. *Les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques de deux paramètres.*

L'équation de la surface de l'onde rapportée à ses trois plans principaux peut se mettre sous la forme

$$(x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2)$$
$$=(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)y^2.$$

Introduisons deux paramètres c et c_1 en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)c^2,$$
$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\gamma^2 = \alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)c_1^2;$$

il en résultera

$$y^2 = \alpha^2 c^2 c_1^2.$$

En résolvant ces trois équations, on trouve les formules

$$x^2 = \beta^2(1 - c^2)(l^2 c_1^2 + l'^2),$$
$$z^2 = \alpha^2(1 - c_1^2)(k^2 c^2 + k'^2),$$
$$y^2 = \alpha^2 c^2 c_1^2,$$

où l'on a posé

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$
$$l^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad l'^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

de sorte que l'on a

$$k^2 + k'^2 = 1, \qquad l^2 + l'^2 = 1.$$

Pour obtenir maintenant x, y, z en fonctions uniformes de deux paramètres, il suffit de se rappeler qu'entre les trois fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, correspondant au module k, on a les relations

$$\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{cn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u = k^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2.$$

Nous poserons alors, en mettant en évidence les modules des fonctions elliptiques,

$$c = \operatorname{cn}(u, k), \qquad c_1 = \operatorname{cn}(v, l),$$

et nous obtiendrons pour x, y, z les formules [1]

$$x = \beta \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, l),$$
$$y = \alpha \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, l),$$
$$z = \alpha \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, l).$$

---

(1) Ces formules sont données sans démonstration à la fin d'un

ou, sous une forme plus abrégée,

$$x = \beta s d_1,$$
$$y = \alpha c c_1,$$
$$z = \alpha d s_1.$$

Remarque. — On passe de k^2 à l'^2 et de k'^2 à l^2 en remplaçant α, β, γ par $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, c'est-à-dire en remplaçant l'ellipsoïde (E) ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

par l'ellipsoide (E')

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 1 = 0$$

polaire réciproque de (E) par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

[L²5b]

RELATION ENTRE LES AXES D'UNE SECTION CENTRALE D'UN ELLIPSOIDE ET LA DISTANCE DU CENTRE AU PLAN TANGENT EN L'UN DES SOMMETS DE LA SECTION;

PAR M. LACOUR,

Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

Soient

a, b, c les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde;

u, v, w les coordonnées du plan sécant rapporté aux axes de l'ellipsoïde;

Mémoire de M. WEBER : *Sur la surface de Kummer* (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 353). — *Voir* aussi : *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*, par APPELL et LACOUR, p. 169.

β et α' les carrés des demi-axes de la section ;
α le carré de la distance du centre O au plan tangent au sommet B_1 tel que $\overline{OB_1}^2 = \beta$.

On sait que l'on a les égalités

$$(1)\qquad \frac{au^2}{a-\beta} + \frac{bv^2}{b-\beta} + \frac{cw^2}{c-\beta} = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{au^2}{a-\alpha'} + \frac{bv^2}{b-\alpha'} + \frac{cw^2}{c-\alpha'} = 0.$$

Pour obtenir α, il suffit de remarquer que les coordonnées du sommet B_1 de la section sont données par les égalités [1]

$$x = m\frac{au}{a-\beta}, \qquad y = m\frac{bv}{b-\beta}, \qquad z = m\frac{cw}{c-\beta},$$

avec la condition

$$\frac{1}{m^2} = \frac{au^2}{(a-\beta)^2} + \frac{bv^2}{(b-\beta)^2} + \frac{cw^2}{(c-\beta)^2}.$$

Alors on a

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m^2\left[\frac{u^2}{(a-\beta)^2} + \frac{v^2}{(b-\beta)^2} + \frac{w^2}{(c-\beta)^2}\right],$$

ou, en remplaçant m^2 par sa valeur et en ordonnant par rapport à u, v, w,

$$(3)\qquad \frac{(a-\alpha)u^2}{(a-\beta)^2} + \frac{(b-\alpha)v^2}{(b-\beta)^2} + \frac{(c-\alpha)w^2}{(c-\beta)^2} = 0.$$

Nous aurons la relation cherchée entre β, α' et α en éliminant u^2, v^2, w^2 entre les équations (1), (2), (3), ou encore en éliminant $\frac{u^2}{a-\beta}$, $\frac{v^2}{b-\beta}$, $\frac{w^2}{c-\beta}$ entre les

(1) *Voir*, par exemple, *Géométrie analytique*, de Briot et Bouquet, revue par Appell, p. 592.

équations

$$(1)\qquad \frac{au^2}{a-\beta} + \frac{bv^2}{b-\beta} + \frac{cw^2}{c-\beta} = 0,$$

$$(2)'\qquad \frac{au^2}{(a-\alpha')(a-\beta)} + \frac{bv^2}{(b-\alpha')(b-\beta)} + \frac{cw^2}{(c-\alpha')(c-\beta)} = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{(a-\alpha)u^2}{(a-\beta)^2} + \frac{(b-\alpha)v^2}{(b-\beta)^2} + \frac{(c-\alpha)w^2}{(c-\beta)^2} = 0.$$

On obtient ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{a}{a-\alpha'} & \dfrac{b}{b-\alpha'} & \dfrac{c}{c-\alpha'} \\ \dfrac{a-\alpha}{a-\beta} & \dfrac{b-\alpha}{b-\beta} & \dfrac{c-\alpha}{c-\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$abc \sum \frac{1}{a-\beta}\left(\frac{1}{c-\alpha'} - \frac{1}{b-\alpha'}\right)$$
$$-\alpha \sum \frac{bc}{a-\beta}\left(\frac{1}{c-\alpha'} - \frac{1}{b-\alpha'}\right) = 0.$$

ou encore

$$abc\sum a(b-c)(b-\beta)(c-\beta)$$
$$-(\alpha+\alpha')abc\sum(b-c)(b-\beta)(c-\beta)$$
$$+\alpha\alpha'\sum bc(b-c)(b-\beta)(c-\beta) = 0.$$

En ordonnant par rapport à β et posant

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$h = a+b+c, \qquad k = bc+ca+ab, \qquad l = abc,$$

on trouve enfin la relation cherchée sous la forme

$$D[\alpha\alpha'\beta^2 - \beta(l - h\alpha\alpha') - k\alpha\alpha' - l(\alpha+\alpha')] = 0.$$

Remarque. — Cette relation contient *symétriquement* α et α', bien que α et α' n'interviennent pas de la

même manière dans l'énoncé de la question. Quand α et α' sont donnés, β peut être obtenu en résolvant une équation du second degré : soit β' la seconde racine de cette équation du second degré. Les relations entre les racines et les coefficients sont ici

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta + \beta' &= h - \frac{l}{\alpha\alpha'}, \\ \beta\beta' &= k - \frac{l}{\alpha\alpha'}(\alpha + \alpha'); \end{aligned} \right.$$

elles peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} M\alpha\alpha' &= l, \\ M(\alpha + \alpha') &= k - \beta\beta', \\ M &= h - \beta - \beta'. \end{aligned}$$

Les quatre paramètres $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ *liés par les deux égalités* (1) *peuvent servir de coordonnées pour le point* B_1 *de l'ellipsoïde.*

Elles ont été introduites avec avantage par M. Darboux dans l'étude de la surface des ondes de Fresnel qui peut, comme on sait, se déduire de l'ellipsoïde au moyen d'une transformation apsidale [1].

[O5m]

CONSÉQUENCE D'UN THÉORÈME SUR LES CONGRUENCES PSEUDOSPHÉRIQUES;

PAR M. GIACOMO CANDIDO, à Pise.

M. le professeur L. Bianchi, dans ses *Lezioni di Geometria differenziale* (p. 269), démontre le théorème

(1) Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, p. 469.

suivant : *L'élément linéaire sphérique rapporté aux lignes* (u, v), *images des surfaces principales d'une congruence pseudosphérique, prend la forme*

$$(\alpha) \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

où le produit $\sqrt{EG}$ *est une solution de l'équation de Liouville*

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v} = \cos\omega\sqrt{EG} \qquad (\omega = \text{const.});$$

et inversement : *chaque fois que l'élément linéaire sphérique est réduit à la forme* (α) *où la relation* (β) *soit satisfaite, il existe une congruence pseudosphérique correspondante.*

Cela posé, l'équation (β) résolue donne

$$\sqrt{EG} = \frac{2f'(u)\varphi'(v)}{\cos\omega[f(u)+\varphi(v)]^2},$$

et nous pouvons écrire aussi

$$(1) \qquad \sqrt{EG}\,du\,dv = \frac{du\,dv}{\frac{\cos\omega}{2}\left[\frac{f(u)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(v)}} + \frac{\varphi(v)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(v)}}\right]^2}.$$

Cet élément superficiel peut appartenir à une infinité de surfaces qui sont données par l'élément linéaire que nous construisons par le moyen du même élément superficiel. Il y a plus : ayant fixé un élément linéaire, en raison du caractère arbitraire des fonctions $f(u)$, $\varphi(v)$, nous pourrons obtenir d'autress urfaces, et comme conclusion nous pouvons dire : *Il existe une infinité de surfaces qui admettent une représentation sur la sphère de manière à conserver à la fois l'orthogonalité d'un système de lignes* (u, v) *et aussi les aires.*

Application. — Parmi les surfaces en nombre infini auxquelles appartient l'élément superficiel donné par le

second membre de (1), il y a aussi les surfaces dont l'élément linéaire est donné par

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\dfrac{\cos\omega}{2}\left[\dfrac{f(u) - \varphi(v)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(u)}}\right]^2}.$$

Parmi les surfaces qui ont cet élément linéaire, nous pouvons spécifier deux classes, car *la famille de surfaces précédemment indiquée contient des hélicoïdes ou des surfaces de révolution.*

En effet, supposons que l'on ait

$$f(u) = u^m, \qquad \varphi(u) = v^m;$$

alors l'élément linéaire (2) devient

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\dfrac{\cos\omega}{2}\left(\dfrac{u^{\frac{m+1}{2}}}{mv^{\frac{m-1}{2}}} + \dfrac{v^{\frac{m+1}{2}}}{mu^{\frac{m-1}{2}}}\right)^2}.$$

Alors aussi E et G de l'élément linéaire de la surface sont des fonctions homogènes de degré -2, et, se rappelant un théorème de M. Darboux (vol. III, p. 73; § 614) on arrive à la conclusion énoncée.

[V1a]

A PROPOS DE LA DÉFINITION DU NOMBRE;

PAR M. H. LAURENT.

M. J. Tannery vient de publier (*Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1898) un compte rendu de l'Ouvrage de M. Laisant : *La Mathématique*. Il y fait une critique, qui me semble injuste, de la définition du

Nombre : (¹) 1° il se demande si une définition du nombre est utile; 2° il accuse M. Laisant de ne pas avoir défini le mot *quantité* qui entre dans la définition du nombre.

Comme je me trouve indirectement visé, je demande la permission à M. Tannery de lui prouver qu'une bonne définition du nombre permet de simplifier considérablement l'exposé des principes fondamentaux de l'Arithmétique et de les rendre autrement clairs que par les méthodes allemandes, lesquelles tendent malheureusement à donner un aspect nébuleux à l'esprit français réputé si clair.

En second lieu, je vais essayer de lui indiquer la définition, très nécessaire, à mon avis, de la quantité, définition qu'il n'ignore peut-être que parce qu'il obéit, sans le vouloir, à des idées systématiques, l'empêchant de jeter ses regards à côté de la direction qu'il a choisie.

Deux objets matériels ou immatériels qui ne diffèrent en rien constituent un seul et même objet, car s'ils étaient distincts, ils différeraient par quelque propriété, position, couleur, forme, ...; nous dirons que ce sont deux objets *identiques*.

Deux ou plusieurs objets, sans être identiques, peu-

(¹) Cette définition, comme je l'ai dit dans mon Livre, a été empruntée par moi à M. H. Laurent. La Rédaction des *Nouvelles Annales* ne pouvait donc refuser à celui-ci la faculté de défendre une doctrine, que d'ailleurs je trouve personnellement excellente; mais il ne faudrait pas en conclure que le Journal prend, en raison de ce fait, un caractère de polémique que nous voulons absolument éviter.

En ce qui concerne particulièrement M. J. Tannery, dont je ne partage pas toutes les idées en matière mathématique, je tiens au contraire à profiter de l'occasion pour le remercier très sincèrement de son compte rendu; la franchise des critiques se concilie parfaitement chez lui avec une parfaite courtoisie de la forme littéraire, et même, je le suppose, avec une bienveillance amicale, qui d'ailleurs est très réciproque de ma part. C.-A. LAISANT.

vent avoir une propriété commune; tels sont, par exemple, les objets rouges; si l'on fait abstraction de toutes leurs autres propriétés, on dit qu'on les considère comme *égaux* entre eux. Par définition, deux objets égaux à un autre sont alors égaux entre eux, puisqu'ils ont la propriété qui constitue l'égalité.

Si l'on a des objets a, b, c, ..., tels qu'en les combinant au moyen d'un certain procédé, on obtienne un objet s qui reste égal à lui-même quel que soit l'ordre dans lequel on combine les objets a, b, c, ..., on dira que s est la somme de a, b, c, ...; parmi les objets a, b, ... il peut en exister dont la considération n'influe pas sur la somme s; ces objets sont dits objets *nuls*; a, b, ... sont les parties de s, etc.

(La multiplication des nombres est un genre d'addition dans lequel l'objet nul est le nombre 1 : zéro et nul ne sont pas synonymes.)

Eh bien, des quantités de même espèce sont des objets à propos desquels on a défini l'égalité et l'addition.

Une quantité A est plus grande qu'une autre B de même espèce, quand on obtient A en ajoutant une quantité de même espèce à B.

De là les vérités suivantes qui sont, non pas des axiomes, mais des vérités de définition : la somme est plus grande que ses parties; une somme ne change pas quand on intervertit l'ordre des parties; et l'on prouve que, pour ajouter une somme à A, il suffit de lui ajouter successivement ses parties.

Voilà pour la définition des quantités. Je ne fais pas à M. Tannery l'injure de croire qu'il ignore ce que je viens de dire; je m'étonnerais seulement qu'il nous accuse de l'ignorer, si je ne connaissais toute sa bonne foi scientifique.

Notre définition du nombre devient alors très claire; je la transcris de nouveau :

« Le nombre est une locution, ou un signe qui en est la représentation écrite, et qui sert à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites. »

Si M. Tannery veut se donner la peine de lire le tout petit Traité d'Arithmétique de MM. Laisant et Lemoine, il verra que cette bonne définition du nombre permet de faire la théorie des nombres incommensurables d'une façon claire et lumineuse, en quelques lignes, et en s'appuyant sur ce simple *postulatum* (je dis *postulatum* parce que les géomètres de l'école allemande se sont efforcés de le démontrer sans y parvenir) :

« Une quantité qui croît sans devenir plus grande que A jouit de cette propriété qu'il existe une quantité a dont elle finit par différer d'aussi peu que l'on veut; et a est, ou A, ou une quantité plus petite que A. »

Si je ne craignais d'abuser de l'hospitalité des *Nouvelles Annales* je ferais volontiers une critique des méthodes allemandes, dont *tous* les géomètres allemands ne sont peut-être pas de fervents adeptes. C'est une tâche que j'espère bien pouvoir accomplir quelque jour.

BIBLIOGRAPHIE.

E. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Tome I : *Problème de Cauchy. — Caractéristiques. — Intégrales intermédiaires.*

Tome II : *La méthode de Laplace. — Les systèmes en involution. — La méthode de M. Darboux. — Les équations de la première classe. — Transformations des équations du second ordre. — Généralisations diverses.* 2 vol. in-8° ; VIII-226 et 344 pages. Paris, Hermann, 1896-1898.

L'Ouvrage que M. Goursat vient d'achever forme une suite naturelle de celui qu'il avait publié sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre et qui est rapidement devenu classique [1]. Mais, tandis que, pour le premier ordre, l'auteur avait pu se contenter d'exposer les recherches classiques et, par suite, avait eu seulement le mérite, d'ailleurs nullement négligeable, d'en faire une exposition très simple et très claire, ici la tâche a été autrement considérable. Pour rassembler en un corps les travaux divers auxquels ont déjà donné lieu les équations du second ordre, il était indispensable d'élucider bien des points obscurs et délicats : c'est ce qu'a fait M. Goursat avec un talent dont il ne m'appartient pas de faire l'éloge.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, on s'est placé jusqu'ici à deux points de vue principaux, qu'on peut caractériser par les noms de Cauchy et de Riemann. C'est au problème de Cauchy, c'est-à-dire à l'étude de la détermination des intégrales analytiques par des conditions aux limites elles-mêmes analytiques, qu'est consacré exclusivement l'Ouvrage de M. Goursat.

Il ne serait pas possible d'indiquer ici les points principaux qui y sont traités sans dépasser beaucoup les limites qui me sont fixées. Le sommaire, reproduit en tête de cet article, indique le plan général de l'Ouvrage : je me contenterai de dire quelques mots sur deux des points qui m'ont le plus vivement intéressé.

La théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre est dominée par la notion de caractéristique : les caractéristiques sont des courbes dont la détermination dépend

---

[1] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, rédigées par C. Bourlet. Paris, Hermann, 1891.

d'équations différentielles ordinaires : on associe, d'ailleurs, à chacune de ces courbes une développable qui la contient; et, ces éléments connus, la résolution et la discussion du problème de Cauchy sont immédiates.

Il est, malheureusement, bien peu probable, que l'on puisse trouver, pour le second ordre, des éléments géométriques dont la détermination se ramène à des équations différentielles ordinaires et dont la connaissance permette de résoudre, sans nouvelle intégration, le problème de Cauchy. En ce sens, la théorie des caractéristiques ne semble pas susceptible de généralisation; mais les caractéristiques ont beaucoup de propriétés intéressantes, qu'il est possible de généraliser; par exemple, la suivante : *Deux surfaces intégrales d'une équation du premier ordre, qui ont un contact d'ordre n en un point d'une caractéristique, ont un contact d'ordre n en tous les points de cette caractéristique.* La notion de caractéristique avait été étendue aux équations du second ordre par Ampère, dont l'admirable Mémoire, longtemps resté le seul travail important sur ce sujet, mérite encore de fixer l'attention des géomètres. M. Goursat a approfondi et généralisé cette notion; les conséquences qu'il en a tirées donnent à son Ouvrage beaucoup d'unité, malgré la diversité des sujets traités.

La lecture en est, d'ailleurs, rendue plus facile et plus attrayante par de nombreuses applications géométriques, dont plusieurs sont nouvelles. Dans bien des questions, certains cas, *a priori* très particuliers, sont ceux qui se présentent le plus fréquemment en pratique : par exemple, beaucoup de problèmes d'Analyse conduisent à des équations algébriques résolubles par radicaux. Les équations du second ordre ne font pas exception à cette règle : celles que les méthodes connues permettent d'intégrer jusqu'au bout paraissent, *a priori*, devoir être des plus rares : cependant, un grand nombre de problèmes de Géométrie conduisent à de telles équations. On en trouvera, en particulier, de très intéressants dans le Chapitre III.

Il faudrait aussi, pour parler des recherches de M. Goursat sur l'équation de Laplace, de sa discussion détaillée de la méthode de M. Darboux, signaler le parti qu'il a su tirer de sa connaissance approfondie des résultats et des méthodes de M. Lie; indiquer enfin la place qu'à côté de ses travaux il a

su faire à ceux de ses élèves. Ce leur sera un précieux encouragement à continuer leurs recherches et, peut-être, pour d'autres jeunes chercheurs, un motif de porter leurs investigations de ce côté. Il y a là, en effet, un champ assez vaste et encore assez neuf pour que bien des travailleurs puissent y faire besogne utile : le livre de M. Goursat sera pour eux un outil indispensable ; à côté d'un exposé complet des progrès les plus récents de la théorie et d'indications sur les points qui appellent de nouvelles recherches, ils y trouveront des renseignements bibliographiques très complets ; je serais presque tenté de dire : trop complets pour ceux qui n'ont pas encore assez d'expérience pour distinguer eux-mêmes les plus importants.

Mais l'Ouvrage de M. Goursat ne s'adresse pas seulement aux chercheurs : sa lecture est nécessaire à quiconque veut se tenir au courant des progrès d'une des branches de la Science qui, si elle est des plus difficiles, est aussi des plus intéressantes.

Émile Borel.

Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales, par E. Mougin, Professeur au Collège de Blois. Chez l'auteur : $1^{fr},25$.

Les Tables de M. Mougin contiennent :

1° En neuf pages, les logarithmes des nombres de 1 à 10000 (1111 logarithmes à la page), avec différences et parties proportionnelles ; le chiffre à gauche du nombre dont on cherche le logarithme indique la page à consulter. Ex. : 5946, page 5 ;

2° En dix-huit pages, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de minute en minute pour tous les arcs du premier quadrant. Même disposition que pour les logarithmes des nombres ;

3° Des notices explicatives, avec de nombreux exemples ;

4° Des formules, mathématiques et physiques, reliées par un fil, pouvant être détachées au moment d'un examen, puis replacées.

On voit que l'auteur est parvenu à condenser beaucoup de choses en bien peu d'espace. Et pourtant pas d'obscurité, pas d'erreurs possibles, en dehors de celles qui sont dues à l'étourderie et qui se produisent avec des Tables quelconques.

La disposition nouvelle adoptée par M. Mougin est absolument ingénieuse; elle serait longue à décrire, mais un coup d'œil permet de s'en rendre compte immédiatement. Quant au résultat obtenu, nous citerons seulement ce fait : là où d'excellentes Tables classiques emploient plus de 90000 caractères, pour les logarithmes des nombres, M. Mougin en emploie seulement 29548.

Il serait bon d'essayer ces nouvelles Tables d'une façon un peu générale et systématique, afin de pouvoir se prononcer définitivement sur leur valeur pratique. Les lecteurs des *Nouvelles Annales* que la question intéresserait pourront s'adresser directement à l'auteur. Il se fera un plaisir de leur envoyer immédiatement un exemplaire à titre d'hommage, sur le désir qui lui en serait exprimé.

Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique, par G. Milhaud, chargé de cours à la Faculté des Lettres de Montpellier. (1 vol. in-12 de la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*, 2fr,50, deuxième édition revue. Félix Alcan, éditeur.)

M. Milhaud, agrégé des Sciences mathématiques, avait présenté ce travail comme thèse pour le doctorat ès lettres, à la Sorbonne. Il a donc pu, grâce à ses connaissances mathématiques, établir avec une compétence particulière, dans cette étude philosophique, les exemples sur lesquels s'appuie sa discussion.

L'auteur s'est proposé de montrer que la contradiction logique n'autorise aucune affirmation en dehors des faits particuliers directement observés. Sa méthode repose sur la distinction fondamentale de ce qui est *donné* et de ce qui est *construit*, dans les éléments de la pensée.

Après avoir établi directement sa thèse, il la confirme par un appel au témoignage des Mathématiques, puis il s'attache à ruiner, par un examen direct, ce que les opinions couramment formulées sur quelques problèmes philosophiques présentent de manifestement contradictoire avec ses conclusions.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Il Nuovo Cimento, rédigé par R. Felici, A. Battelli et V. Volterra; série IV, t. VII; Pise, 1898.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse; t. XII; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

M. d'Ocagne. — Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (Extrait des *Acta mathematica*, t. XXI); 1897.

E. Vicaire. — Observations sur le Traité de Mécanique de G. Kirchhoff (Extrait du *Bull. de la Soc. Phil.*); Paris, 1897.

The Educational Times; nouvelle série, t. LI; Londres, 1898.

Ed. Maillet. — Des groupes primitifs de classe N − 1 et de degré N (Extrait du *Bull. de la Soc. Math. de France*); Paris, 1897.

Ed. Maillet. — Sur les groupes de substitutions deux fois transitifs à trois degrés (Extrait du *Bull. de la Soc. Math. de France*); Paris, 1897.

Ed. Maillet. — Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs (Extrait du *Journ. de Math. pures et appliquées*); Paris, 1897.

D.-J. Korteweg. — Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale (vibrations de relation) dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté (Extrait des *Arch. Néerlandaises*); Amsterdam, 1897.

R. Ball. — The twefth and concluding memoir on the theory of screws (Extrait des *Trans. of the R. Irish Acad.*); Dublin, 1898.

P. Mansion. — Mélanges de Géométrie euclidienne et non euclidienne.

G. Sperk. — Critique de l'enseignement des Mathématiques; Lausanne, 1898.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1767.

(1897, p. 24[illegible].)

Étant donné un point M de l'espace, on lui fait correspondre le point M' qui lui est diamétralement opposé dans

la sphère qui passe par ce point et par un cercle fixe Γ *donné dans un plan* π. *Si le point* M *décrit une courbe* (M) *ou une surface* [M], *le point* M′ *décrit une courbe* (M′) *ou une surface* [M′].

Démontrer les théorèmes suivants :

1° *Si la surface* [M] *est une quadrique passant par le cercle* Γ, *la surface* [M′] *est aussi une quadrique passant par ce cercle.*

Ces deux quadriques se coupent suivant un second cercle Γ_1 *et la sphère admettant* Γ *pour section diamétrale contient aussi le cercle* Γ_1.

Si la surface [M] *se réduit à un plan, le théorème subsiste, mais la quadrique* [M′] *passe alors par le point à l'infini dans la direction normale au plan du cercle* Γ.

2° *Si la courbe* (M) *est une section circulaire de la quadrique* [M] *dans un plan parallèle au plan* π_1 *du cercle* Γ_1, *la courbe* (M′) *est une section circulaire de la quadrique* [M′] *également dans un plan parallèle à* π_1.

3° *Pour des surfaces ou des courbes quelconques, on a les propositions suivantes :*

Les parallèles aux normales en M *et en* M′ *aux surfaces* [M] *et* [M′], *respectivement menées par* M′ *et* M, *se coupent dans le plan* π.

Les plans parallèles aux plans normaux en M *et en* M′ *aux courbes* (M) *et* (M′), *respectivement menés par* M′ *et* M, *se coupent dans le plan* π.

(*Cette seconde proposition est une conséquence immédiate de la première*). (M. d'Ocagne).

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons C le centre de la sphère Γ^2 admettant Γ pour section diamétrale, O le pôle de π par rapport à Γ^2, M_1 le symétrique de M′ par rapport au centre C; les points M et M_1 se correspondent dans une transformation d'Hirst ayant Γ^2 pour quadrique double, et le point O (à l'infini) pour pôle.

La transformation définie par l'énoncé est donc le *produit* d'une inversion quadrique et d'une symétrie centrale, et par suite une transformation quadratique rationnelle involutive. Il s'ensuit que, à une courbe (M) de l'ordre n ayant p points dans le plan π, non placés sur le cercle Γ, coupant le cylindre

(ΓO) en r points, et qui passe q fois par le point O, correspond en général une courbe (M′) de l'ordre $n' = n - p - q$, qui rencontre le plan π en q points non situés sur Γ et en r placés sur Γ, qui passe p fois par le point O, et coupe le cylindre (ΓO) en $n - p$ points. Les seules droites ayant pour correspondants des droites (ou mieux des coniques dégénérées) sont celles qui passent par O ou par des points du cercle Γ. A une surface [M] de l'ordre n, de la classe m, ayant pour ordre du complexe de ses tangentes c, et n'ayant pas de relations spéciales de position avec π et Γ, correspond une surface [M′] de l'ordre $2n$ et de la classe $2n + m + c$, passant n fois par le cercle Γ et aussi n fois par le point à l'infini O. Si [M] passe q fois par Γ et p fois par O se détachent de la surface [M′] q cylindres (ΓO) et p plans π : l'ordre de [M′] devient $2n - 2q - p$, [M′] passe $n - p - q$ fois par Γ et $n - 2q$ fois par le point O.

La transformée [M′] passe en outre évidemment par la courbe sphérique symétrique, par rapport au centre C de Γ^2, de la courbe où la sphère Γ^2 est coupée par [M].

En particulier, à un plan α correspond une quadrique passant par O, par Γ et par le cercle intersection de la sphère Γ^2 avec le plan α_1 symétrique de α par rapport à C. A une quadrique menée par Γ correspond une quadrique [M′] qui passe par Γ et par le cercle Γ_1, symétrique par rapport à C de l'intersection ultérieure de [M] avec Γ^2. Si la quadrique [M] passe aussi par le point O, [M′] dégénère en deux plans, l'un desquels est π (qu'on ne compte pas) et l'autre le symétrique de celui qui contient l'intersection ultérieure de [M] avec Γ^2. Comme la transformation est involutoire ce deuxième plan est celui auquel correspond la quadrique [M], etc. Aux plans de l'espace correspondent les quadriques d'une gerbe particulière, dont les paraboloïdes de révolution correspondent aux plans parallèles à π, les cônes aux plans tangents à Γ, etc.

2° A la courbe (M), intersection de la quadrique [M] avec un plan ν parallèle au plan π_1 de la section circulaire Γ_1, correspond l'intersection ultérieure des quadriques [M′] et [N′], transformées respectivement de [M] et de ν; les trois quadriques Γ^2, [M′], [N′], ayant en commun la conique Γ, ont deux à deux une autre courbe plane commune, et les plans de ces trois dernières courbes forment un faisceau : mais Γ^2 et [M] se coupent suivant les cercles Γ et Γ_1, de même Γ^2 et [N′] se coupent suivant Γ et le cercle Γ′, intersection de la sphère Γ^2

avec le plan ν', symétrique de ν par rapport à C, les plans des cercles Γ_1 et Γ' sont parallèles; donc, etc (¹).

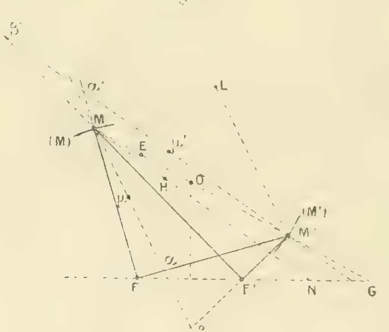
3° Les normales en M et M_1 aux surfaces [M] et [M_1], qui se correspondent dans la transformation d'Hirst, sont dans le plan $MM_1O = \mu$: les normales à [M] et [M'] en les points M et M' sont donc dans ce même plan μ et coïncident avec les normales en M et M' à la courbe plane ([M], μ) et à sa transformée ; en appelant P leur intersection, les parallèles aux normales en M et M' à [M] et [M'], respectivement menées par M' et M, se coupent sur la droite ($\mu\pi$) en le point qui est symétrique de P par rapport au centre de la sphère (M Γ).

Voici, au sujet de cette question, quelques remarques qui nous ont été communiquées par M. A. Mannheim.

Par l'axe du cercle Γ et par le point M faisons passer un plan R. Ce plan coupe Γ aux points F, F'; il coupe S suivant la courbe (M) et S' suivant la courbe (M').

Dans le plan R (*fig.* 1), la courbe (M') est le lieu des points M' diamétralement opposés aux points M sur les cercles passant

Fig. 1.



par ces points et par F et F', ou encore, elle est telle que le segment MM' soit vu sous un angle droit de chacun des points F ou F'.

Cherchons la normale en M' à (M'). Lorsque FM tourne

(¹) En général, à toute section plane d'une quadrique menée par Γ correspond un cercle, et par suite à chaque conique menée par un point de Γ.

autour de F de l'angle infiniment petit $d\omega$, le point M se déplace sur (M) de l'arc infiniment petit $d(M)$. On a

$$d(M) = M\alpha . d\omega,$$

la droite $M\alpha$ étant la normale en M à (M).

De même

$$d(M') = M'\alpha' . d\omega;$$

par suite

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\alpha}{M'\alpha}.$$

On trouve de même, au moyen de F',

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{M\beta}{M'\beta'}.$$

On a alors

$$\frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{M'\alpha'}{M'\beta'}.$$

Menons M'N parallèlement à $M\alpha$. Les droites M'M, M'F, M'F', M'N forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à $\frac{M\alpha}{M\beta}$. Par suite, en coupant ce faisceau par FG, ce rapport donne le rapport anharmonique des points F, F', N, G.

En prenant le rapport égal $\frac{M'\alpha'}{M'\beta'}$, on arrive alors à ces mêmes points, donc : *les parallèles aux normales en* M *et* M' *aux courbes* (M), (M'), *menées respectivement par* M' *et* M, *se coupent en un point* N *de la droite* FF'.

La sphère, menée par Γ et par M, coupe S et S' suivant des courbes correspondantes.

Menons par MM' le plan U qui les touche en M et M'. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle C tangent à ces courbes en ces points.

Les normales en M et M' à S et S', ainsi que les parallèles à ces droites, menées respectivement de M' et M, se projettent alors sur le plan U suivant le diamètre MM' du cercle C; autrement dit : ces dernières droites rencontrent l'axe du cercle C. Mais, d'après ce qui précède, leurs projections sur R se coupent en un point du plan de Γ; donc : *les parallèles aux normales en* M *et* M' *aux surfaces* S *et* S', *menées respectivement par* M' *et* M, *passent par la trace de l'axe du cercle* C *sur le plan de* Γ.

Cette démonstration géométrique a l'avantage de préciser la position du point de rencontre de ces parallèles.

Cherchons maintenant le centre de courbure de (M') pour le point M'. Pour cela, je vais d'abord donner la solution du problème suivant :

Un segment ab (fig. 2), de longueur variable, est limité aux courbes (a) et (b); il se déplace en restant tangent à une courbe donnée (e). Du point b on mène une parallèle à la tangente ac menée de a à une courbe donnée (c) : construire le point où cette parallèle touche son enveloppe.

Fig. 2.



On prend le point de rencontre g de la normale en c à (c) avec la normale en a à (a) et l'on mène la perpendiculaire gh à ab. Cette droite coupe ac en h et l'on mène la droite he qui rencontre en m la parallèle bm à ac. La perpendiculaire ml à ab donne, sur la normale en b à (b), le point l que l'on projette en i sur bm : le point i est le point demandé.

Reprenons la courbe (M') (*fig.* 1) et supposons connu le centre de courbure μ de (M) pour M. Lorsqu'on déplace M sur (M) le milieu O de MM' reste sur la perpendiculaire élevée du milieu de FF' à ce segment. On connaît alors la normale en ce point O à la ligne qu'il décrit, et comme on connaît les normales en M et M' à (M) et (M'), on peut facilement construire le point E où MM' touche son enveloppe.

Connaissant E et μ, on détermine par la construction précédente le point L où M'N touche son enveloppe.

Prenons maintenant MN, dont les extrémités décrivent des lignes dont on possède les normales en M et N; en outre, les parallèles Mμ, M'N touchent leurs enveloppes aux points μ, L. Par une construction inverse de celle qui précède, on peut construire le point H où MN touche son enveloppe.

Enfin, connaissant le point E où MM touche son enveloppe et le point H qui vient d'être déterminé, on peut construire le point μ' où la parallèle menée de M' à MH touche son enveloppe : *ce point* μ' *est le centre de courbure de* (M') *pour le point* M'.

QUESTIONS.

399 (**1857**, 391). Soient donnés un tétraèdre quelconque *abcd* et, dans son intérieur, un point o tel que les droites oa, ob, oc déterminent un angle trirectangle ; je mène par le point o des plans parallèles aux faces du tétraèdre ; ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélépipèdes dont je désigne les volumes par P_a, P_b, P_c, P_d. On a

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{ob}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{oc}{P_c}\right)^2 = \left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$

(MANNHEIM.)

400 (**1857**, 391). Soit u une fonction *rationnelle* et *entière* du degré n d'un nombre quelconque de variables x, y, z, ..., et soient du, d^2u, ..., d^nu les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, ... sont *constantes* (¹).

Formons l'équation

$$\begin{aligned} t^n d^n u + n t^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u \\ + n(n-1)(n-2) t^{n-3} d^{n-3} u \\ + n(n-1)(n-2) \ldots 2 t\, du \\ + n(n-1)(n-2) \ldots 2.1.u = 0. \end{aligned}$$

Formons une fonction symétrique *quelconque* rationnelle et entière des *différences* des racines de cette équation ; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u$, $d^{n-1}u$, d^{n-2}, ..., du, u, et, par conséquent, une fonction de x, y, z, ..., dx, dy, dz, ... ; si l'on différentie cette dernière fonc-

(¹) Alors du renferme dx, dy, dz ; d^2u renferme dx^2, dy^2, $dx.dy$, ... et $d^{n+1}u = 0$.

tion en traitant $dx, dy, dz, \ldots$ comme des constantes, on trouve un résultat *identiquement* nul.

(Michael Roberts).

Note du Rédacteur.

Exemple. — Soit

$$n = 2,$$

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

$$du = 2(ax\,dx + by\,dy + cz\,dz),$$

$$d^2u = 2(a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2).$$

L'équation en t est

$$t^2 d^2u + 2t\,du - 2u = 0.$$

Choisissons pour fonction symétrique la somme des carrés des différences des racines : cette somme est

$$\begin{aligned} 4(du^2 - 2u\,d^2u) = -16[\,&ab(x\,dy - y\,dx)^2 \\ &+ ac(x\,dz - z\,dx)^2 \\ &+ bc(y\,dz - z\,dy)^2\,]; \end{aligned}$$

différentiant cette valeur en regardant dx, dy, dz comme constants, le résultat est identiquement nul.

414 (**1858**, 31). Quel est l'aspect du monde pour un spectateur placé sur la Lune supposée sans atmosphère? par quels moyens ce spectateur peut-il reconnaître que la Lune tourne autour de la Terre et pas la Terre autour de la Lune?

424 (**1858**, 32). On a mesuré les trois côtés d'un triangle sphérique ABC; α, β, γ sont les erreurs *absolues* respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Évaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

(Caillet.)

1800. On coupe une cubique ayant un point de rebroussement par une droite quelconque. Par chacun des points de rencontre on peut mener à la cubique une tangente, autre que celle qui touche la cubique en ce point. Démontrer que les trois points de contact de ces tangentes sont en ligne droite.

Propriété corrélative. (A. Cazamian.)

[I2c]

SUR QUELQUES THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. C. MOREAU,
Colonel d'Artillerie en retraite.

THÉORÈME I. — *Les restes de la division par p de p termes successifs d'une progression arithmétique de raison N, p et N étant premiers entre eux, sont dans un certain ordre, en n'admettant pas de reste nul, les p premiers nombres*

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (p-1),\ p.$$

En effet, soit

$$(2) \qquad \begin{cases} a, \quad a+N, \quad \ldots, \quad a+KN, \quad \ldots, \\ a+K'N, \quad \ldots, \quad a+(p-1)N \end{cases}$$

la progression arithmétique considérée; les restes de la division de ses termes par p sont, en n'admettant pas de reste nul, au plus égaux à p; de plus, ils sont tous différents; car si, par exemple, $a+KN$ et $a+K'N$ donnaient le même reste, il en résulterait que p diviserait la différence $(K'-K)N$, ce qui est impossible, puisqu'il est premier avec N et forcément plus grand que $K'-K$; ces restes sont donc, dans un certain ordre, les termes de la suite (1).

COROLLAIRE. — Il y a dans la suite (2) autant de nombres premiers avec p que dans la suite (1) et il s'y trouve un terme, et un seul, divisible par p.

Définition. — On appelle *indicateur* d'un nombre N, et l'on désigne par la notation $\varphi(N)$ le nombre qui

exprime combien la suite

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad (N-1),\quad N$$

contient de termes premiers avec N.

D'après cette définition, on a

$$\varphi(1)=1,\qquad \varphi(2)=1,\qquad \varphi(N)=N-1$$

lorsque N est un nombre premier.

Théorème II. — *Si l'on multiplie un nombre quelconque* N *par un nombre premier* p, *on a*

$$\varphi(pN)=p\,\varphi(N)\qquad\text{ou}\qquad (p-1)\,\varphi(N),$$

suivant que p *divise ou ne divise pas* N.

Pour le démontrer formons le Tableau des pN premiers nombres en les écrivant par rangées successives de N nombres

$1,$	$2,$	$3,$	$\ldots,$	$a,$	$\ldots,$	$N-1,$	N
$1+N,$	$2+N,$	$3+N,$	$\ldots,$	$a+N,$	$\ldots,$	$2N-1,$	2
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots,$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$
$1+KN,$	$2+KN,$	$3+KN,$	$\ldots,$	$a+KN,$	$\ldots,$	$(K+1)N-1,$	$(K+$
$\ldots\ldots,$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots,$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$
$1+(p-1)N,$	$2+(p-1)N,$	$3+(p-1)N,$	$\ldots,$	$a+(p-1)N,$	$\ldots,$	$pN-1,$	p

et cherchons combien il y en a qui sont premiers avec le produit pN.

Prenons le terme quelconque $a+$KN. Pour que ce terme soit premier avec pN, il faut qu'il le soit avec N et cela ne peut arriver que si a lui-même est premier avec N; les nombres cherchés ne peuvent donc se rencontrer que dans les $\varphi(N)$ colonnes commençant par ceux des nombres de la première rangée qui sont premiers avec N. Voyons maintenant combien chacune de ces colonnes en contient, par exemple celle commençant par a.

Premier cas : *Le nombre premier p divise* N. — Les p termes de la colonne considérée étant premiers avec N le sont aussi avec le produit pN qui ne contient pas de facteurs premiers étrangers à N. Ainsi, dans ce cas, on a

$$\varphi(pN) = p\varphi(N).$$

Deuxième cas : *Le nombre premier p ne divise pas* N. — Les p termes de la colonne considérée forment une progression arithmétique de raison N ; or, d'après le corollaire du théorème I, p étant premier avec N, il y a dans cette progression autant de termes premiers avec p que dans la suite des p premiers nombres, c'est-à-dire $p - 1$, et ces $p - 1$ nombres étant à la fois premiers avec N et avec p le sont avec le produit pN. Ainsi, dans ce cas, on a

$$\varphi(pN) = (p-1)\varphi(N).$$

Corollaire I. — Il résulte de ce qui précède que, si $p, q, r, \ldots$ sont les facteurs premiers entrant dans la composition de N, on a

$$(3) \qquad \varphi(N) = \frac{N}{pqr\ldots}(p-1)(q-1)(r-1)\ldots,$$

ce que l'on écrit aussi

$$(4) \qquad \varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots$$

Corollaire II. — M et N étant deux nombres quelconques premiers entre eux, on a

$$\varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N).$$

Si, au contraire, M ne contient pas de facteurs premiers étrangers à N, on a

$$\varphi(MN) = M\varphi(N).$$

Remarque. — $\varphi(N)$ est toujours un nombre pair, excepté pour $N = 1$ ou 2.

THÉORÈME III. — *Si l'on multiplie les $\varphi(N)$ nombres qui ne surpassent pas N et sont premiers avec lui, par l'un quelconque d'entre eux, on obtient une suite de termes dont les restes de la division par N sont dans un certain ordre les $\varphi(N)$ nombres desquels on est parti.*

Soient, en effet,

$$(5) \qquad 1, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad N-1,$$

les $\varphi(N)$ nombres qui ne surpassent pas N et sont premiers avec lui ; en les multipliant, par exemple, par a, nous aurons une suite de termes

$$(6) \qquad a, \quad a^2, \quad ab, \quad ac, \quad \ldots, \quad a(N-1)$$

qui seront tous premiers avec N : donc les restes de la division par ce nombre seront également premiers avec lui et feront, en conséquence, partie de la suite (5) ; de plus, ces restes sont tous différents, car si deux termes quelconques ab et ac donnaient le même reste, il en résulterait que N diviserait leur différence $(c-b)a$, ce qui est impossible, puisqu'il est premier avec a et forcément plus grand que $c-b$; ce sont donc, dans un certain ordre, les nombres mêmes de la suite (5).

COROLLAIRE. — Ce théorème montre que, si l'on désigne par A un nombre quelconque de la suite (5), il existe dans la suite (6) un terme, et un seul, qui, divisé par N, donne A pour reste. On peut donc dire qu'à chaque nombre a de la suite (5) en correspond un autre b tel que $ab - A$ soit divisible par N, à moins

que a ne se corresponde à lui-même et que N ne divise $a^2 - A$.

Ainsi, les nombres de la suite (5) sont de deux espèces par rapport à A :

1° Ceux a, b, c, d, ... qui sont tels que les différences $ab - A$, $cd - A$, ... soient divisibles par N ; ils sont dits *associés deux à deux par rapport à A pour le module* N ;

2° Ceux α, β, ... qui sont tels que les différences $\alpha^2 - A$, $\beta^2 - A$, ... soient divisibles par N ; ils sont dits *égaux à leurs associés par rapport à A pour le module* N et nous en désignerons le nombre par la notation $\mu_A(N)$.

Remarque. — Il est à remarquer que les nombres de cette dernière catégorie sont deux à deux complémentaires à N, car il est évident que, si $\alpha^2 - A$ est divisible par N, il en est de même de $(N - \alpha)^2 - A$.

Il y a lieu d'examiner en particulier le cas de $A = 1$ et de déterminer combien il y a alors de nombres égaux à leurs associés par rapport à 1, ou simplement égaux à leurs associés, pour le module N.

Théorème IV. — *Le nombre $\mu_1(N)$ des nombres égaux à leurs associés pour le module N peut être représenté par une puissance de 2 dont l'exposant est égal au nombre des facteurs premiers impairs entrant dans la composition de N augmenté de* 0, *de* 1 *ou de* 2, *suivant que le facteur* 2 *y entre lui-même au plus une fois, deux fois ou plus de deux fois.*

La démonstration de ce théorème repose sur les considérations qui vont être exposées.

Premier cas : *Lorsque N est une puissance de 2, on a*

$$\mu_1(N) = 1, 2 \text{ ou } 4,$$

suivant que l'exposant de cette puissance est 1, 2 *ou est supérieur à* 2.

Les deux premiers résultats sont évidents. Quant au troisième, pour que $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ soit divisible par N, il faut que l'un des deux nombres $\alpha - 1$ ou $\alpha + 1$ soit divisible par $\frac{N}{2}$, car, N étant une puissance de 2, ces nombres sont des nombres pairs consécutifs dont l'un ne contient, par conséquent, qu'une fois le facteur 2; or il n'y a que quatre valeurs de α pour lesquelles cette condition soit remplie, savoir : 1, $\frac{N}{2} - 1$, $\frac{N}{2} + 1$, $N - 1$, ce qui démontre le troisième résultat.

Deuxième cas : *Lorsque N est un nombre premier impair, on a*

$$\mu_1(N) = 2.$$

En effet, le nombre premier N doit diviser $\alpha - 1$ ou $\alpha + 1$ et cela ne peut arriver, α étant inférieur à N, que pour $\alpha = 1$ et $\alpha = N - 1$.

Troisième cas : *Si l'on multiplie un nombre quelconque N par un nombre premier impair p, on a*

$$\mu_1(pN) = \mu_1(N) \quad \text{ou} \quad 2\mu_1(N),$$

suivant que p divise ou ne divise pas N.

Écrivons de la même manière que précédemment le Tableau des pN premiers nombres et cherchons com-

bien il y en a dont le carré, diminué d'une unité, soit divisible par pN.

$1,$	$2,$	$3,$	$\ldots,$	$\alpha,$	$\ldots$	$N-1,$	N
$1+N,$	$2+N,$	$3+N,$	$\ldots,$	$\alpha+N,$	$\ldots$	$2N-1,$	$2N$
$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots,$	$\ldots$
$1+KN,$	$2+KN,$	$3+KN,$	$\ldots$	$\alpha+KN,$	$\ldots,$	$(K+1)N-1,$	$(K+1)N$
$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
$1+(p-1)N,$	$2+(p-1)N,$	$3+(p-1)N,$	$\ldots,$	$\alpha+(p-1)N,$	$\ldots$	$pN-1,$	pN

Prenons le terme quelconque $\alpha+KN$, son carré, diminué de 1, est $\alpha^2-1+2\alpha KN+K^2N^2$, et il est clair que cette quantité n'est divisible par N que si α^2-1 lui-même l'est; on ne peut donc rencontrer les nombres cherchés que dans les colonnes commençant par les $\mu_1(N)$ nombres jouissant de la même propriété par rapport à N. Voyons maintenant combien chacune de ces colonnes en contient, par exemple celle commençant par α.

Le nombre premier impair p divise N. — Pour que $\alpha^2-1+2\alpha KN+K^2N^2$ soit divisible par pN, il faut et il suffit que $\frac{\alpha^2-1}{N}+2\alpha K+K^2N$ ou, puisque p est facteur de N, que $\frac{\alpha^2-1}{N}+2\alpha K$ soit divisible par p; faisons la même opération sur tous les nombres de cette colonne, nous obtiendrons p termes successifs d'une progression arithmétique de raison 2α; or p est premier avec 2α puisqu'il est impair et que, divisant N, il ne peut diviser α qui est premier avec N: donc (théorème I, corollaire) cette progression contient un terme et un seul divisible par p. Ainsi, dans chaque colonne commençant par un nombre tel que α, il y a un nombre et un seul dont le carré, diminué de 1, est divisible par pN, d'où il suit $\mu_1(pN)=\mu_1(N)$.

Le nombre premier impair p ne divise pas N. — Pour que $(\alpha + KN)^2 - 1$ soit divisible par pN, comme il est déjà divisible par N et que p est premier avec N, il faut et il suffit qu'il soit divisible par p; mais, au point de vue de la divisibilité par p, il revient au même, au lieu de considérer les nombres eux-mêmes tels que $\alpha + KN$, de considérer les restes de leur division par p. Or ces nombres forment une progression arithmétique de raison N et, d'après le théorème I, les restes de leur division par p sont, dans un certain ordre, les p premiers nombres: il y en a donc parmi eux deux (2e cas) qui sont tels que leur carré, diminué de 1, soit divisible par p et, par conséquent, par pN. Il suit de là $\mu_1(pN) = 2\mu_1(N)$.

Conclusion. — L'exactitude du théorème énoncé résulte de la combinaison des divers cas examinés.

Corollaire I. — Les nombres pour lesquels μ_1 est égal à 2 sont p^k, $2p^k$ *et* 4, p étant un nombre premier impair et k un nombre quelconque. Pour tous les autres nombres μ_1 est divisible au moins par 4.

Corollaire II. — Si M et N sont deux nombres premiers entre eux, on a $\mu_1(MN) = \mu_1(M)\mu_1(N)$.

Au contraire, si M est un nombre impair qui ne contient pas de facteurs premiers étrangers à N, on a $\mu_1(MN) = \mu_1(N)$.

Définition. — On dit que deux nombres A et B sont congrus pour le module N, lorsque leur différence A — B est divisible par N. Cette propriété des nombres A et B s'écrit sous la forme

$$A \equiv B \pmod{N}.$$

qui s'énonce A *congru à* B *module* N et qui prend le nom de *congruence*.

D'après cette définition, il est évident que l'on peut appliquer aux congruences de même module les opérations suivantes de l'Algèbre : addition, soustraction, multiplication, élévation aux puissances.

Théorème V. — *Le produit* P *des* $\varphi(N)$ *nombres qui ne surpassent pas* N *et sont premiers avec lui est congru pour le module* N *à la puissance d'exposant* $\frac{1}{2}\varphi(N)$ *d'un quelconque* A *de ces* $\varphi(N)$ *nombres, cette puissance étant prise positivement ou négativement suivant que* $\mu_A(N)$ *est divisible par* 4 *ou seulement par* 2.

Le produit P *et le nombre* A *satisfont donc à la congruence*

$$P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\mu_A(N)} A^{\frac{1}{2}\varphi(N)} \pmod{N}.$$

Pour effectuer le produit P, prenons les nombres dont il se compose en réunissant d'abord deux à deux les nombres associés par rapport à A pour le module N, puis en groupant avec leurs complémentaires à N les nombres égaux à leurs associés, nous aurons ainsi la suite de congruences de même module

$$\frac{1}{2}\varphi(N)\text{ congruences}\left\{\begin{array}{l} ab \equiv A \pmod{N} \\ cd \equiv A \pmod{N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} \alpha(N-\alpha) \equiv -A \pmod{N} \\ \beta(N-\beta) \equiv -A \pmod{N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \frac{1}{2}\mu_A(N)\text{ congruences} \end{array}\right.$$

et, en les multipliant membre à membre, nous aurons, comme cela a été annoncé,

$$(7) \qquad P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\mu_A(N)} A^{\frac{1}{2}\varphi(N)} \pmod{N}.$$

Corollaire I. — En faisant $A = 1$ dans la formule (7), il vient

$$(8) \qquad P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\mu_1 \varphi(N)} \qquad (\text{mod } N),$$

ce qui montre que N *divise toujours* $P + 1$ *ou* $P - 1$ (théorème de Wilson généralisé).

Pour que ce soit $P + 1$ qui soit divisible par N, il faut, puisque μ_1 est une puissance de 2 (théorème IV), que l'on ait $\mu_1 = 2$ et, en se reportant au corollaire I du même théorème, on voit que les nombres qui remplissent cette condition sont *une puissance quelconque d'un nombre premier impair, le double d'une telle puissance et le nombre* 4. Dans tous les autres cas, c'est $P - 1$ qui est divisible par N. Le nombre 2 fait exception et appartient aux deux catégories.

En particulier, si N est un nombre premier, P est égal à $(N - 1)!$ et N *divise* $(N - 1)! + 1$ (théorème de Wilson).

Corollaire II. — Par comparaison, on déduit des formules (7) et (8)

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mu_A \varphi(N)} A^{\frac{1}{2}\varphi(N)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\mu_1 \varphi(N)} \qquad (\text{mod } N)$$

ou, en élevant au carré,

$$(9) \qquad A^{\varphi(N)} \equiv 1 \qquad (\text{mod } N),$$

ce qui peut s'énoncer ainsi : *Si* N *est premier avec* A, *il divise* $A^{\varphi(N)} - 1$ (théorème de Fermat, généralisé par Euler).

En particulier, *si* N *est un nombre premier qui ne divise pas* A, *il divise* $A^{N-1} - 1$ ou, si l'on veut, *tout nombre premier* N *divise* $A^N - A$, *quel que soit* A (théorème de Fermat).

Remarque. — Conformément au théorème d'Euler,

l'indicateur est tel que $A^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N si A et N sont premiers entre eux; mais il existe généralement, pour chaque valeur de N, des nombres plus petits que $\varphi(N)$ et qui jouissent de la même propriété.

D'après le corollaire I du théorème II, l'indicateur est égal au produit des nombres

$$\frac{N}{pqr\ldots},\ (p-1),\ (q-1),\ (r-1),\ \ldots.$$

Or il suffit, pour que $A^m - 1$ soit divisible par N, que m soit un multiple commun de ces nombres, par exemple leur plus petit commun multiple; car alors, en mettant en évidence les puissances

$$p^k,\ q^h,\ r^l,\ \ldots$$

des nombres premiers qui composent N, m est divisible par les quantités

$$p^{k-1}(p-1),\ q^{h-1}(q-1),\ r^{l-1}(r-1),\ \ldots$$

qui en sont respectivement les indicateurs et, par suite, $A^m - 1$ est divisible par chacune de ces puissances et, par conséquent, par leur produit, qui est N.

On peut même ajouter que si N, sans être égal à 4, est divisible par 4, il suffit de prendre le plus petit commun multiple des nombres

$$\frac{N}{2pqr\ldots},\ (p-1),\ (q-1),\ (r-1),\ \ldots$$

parce que, dans ce cas, A est impair, m toujours pair et qu'une puissance paire d'un nombre impair, diminuée de 1, contient le facteur 2 deux fois de plus au moins qu'il n'est contenu dans l'exposant de cette puissance.

En résumé, le plus petit commun multiple des

nombres

$$\frac{N}{2pqr\ldots},\ (p-1),\ (q-1),\ (r-1),\ \ldots$$

(N divisible par 4 sans être égal à 4),

ou

$$\frac{N}{pqr\ldots},\ (p-1),\ (q-1),\ (r-1),\ \ldots$$

(N non divisible par 4 ou égal à 4),

peut remplacer l'indicateur $\varphi(N)$ dans l'application du théorème d'Euler. On donne à ce nombre le nom d'*indicateur réduit*, et on le désigne par la notation $\psi(N)$.

Il y a une certaine catégorie de nombres pour lesquels $\psi(N)$ est égal à $\varphi(N)$: ce sont ceux qui n'ont qu'un couple de nombres égaux à leurs associés pour le module N et qui ont déjà été cités aux corollaires I des théorèmes IX et X, c'est-à-dire p^k, $2p^k$ et 4, p étant un nombre premier impair et k un nombre quelconque; il est en effet évident que le plus petit multiple commun des nombres p^{k-1} et $p-1$ ne peut être que leur produit.

Autre remarque. — Ces mêmes nombres possèdent encore une autre propriété importante, qui consiste en ce que ce sont les seuls pour lesquels il existe des *racines primitives*.

Si l'on prend les restes de la division par N ou les *résidus* des puissances successives d'un nombre a plus petit que N et premier avec lui, on obtient une suite de nombres premiers avec N; cette suite est périodique et l'amplitude de la période est au plus égale à $\psi(N)$, car, puisque $a^{\psi(N)}$ donne 1 pour résidu, il est clair que les deux puissances d'exposants k et $\psi(N)+k$ fourniront le même résidu. Cela posé, on dit que le nombre a est *racine primitive relativement au module* N lorsque les résidus de ses $\varphi(N)$ premières puissances sont tous dif-

férents et reproduisent, dans un certain ordre, le dernier étant 1 conformément au théorème d'Euler, les $\varphi(N)$ nombres inférieurs à N et premiers avec N ; or, d'après ce qu'on vient de voir, cela est impossible si $\psi(N)$ est plus petit que $\varphi(N)$ et, par conséquent, *il n'y a que les nombres pour lesquels l'indicateur et l'indicateur réduit sont égaux qui puissent avoir des racines primitives.*

Tableau faisant connaître, au moins jusqu'à 1000, *les nombres correspondant aux diverses valeurs de l'indicateur réduit de* 1 *à* 100.

$\psi(N)$.	N.
1.	1.2.
2.	3.4.6.8.12.24.
4.	5.10.15.16.20.30.40.48.60.80.120.240.
6.	7.9.14.18.21.28.36.42.56.63.72.84.126.168.252. 504.
8.	32.96.160.480.
10.	11.22.33.44.66.88.132.264.
12.	13.26.35.39.45.52.65.70.78.90.91.104.105.112. 117.130.140.144.156.180.182.195.208.210.234. 260.273.280.312.315.336.360.364.390.420.455. 468.520.546.560.585.624.630.720.728.780.819. 840.910.936.....65520.
16.	17.34.51.64.68.85.102.136.170.192.204.255.272. 320.340.408.510.544.680.816.960.1020.1088. 1360.1632.2040.2720.3264.4080.5440.8160.16320.
18.	19.27.38.54.57.76.108.114.133.152.171.189.216. 228.266.342.378.399.456.513.532.684.756.798. 1026.1064.1197.1368.1512.1596.2052.2394.3192. 3591.4104.4788.7182.9576.14364.28728.
20.	25.50.55.75.100.110.150.165.176.200.220.275. 300.330.400.440.528.550.600.660.825.880.1100. 1200.1320.1650.2200.2640.3300.4400.6600.13200.
22.	23.46.69.92.138.184.276.552.
24.	224.288.416.672.1120.1248.1440.2016.2080.2912. .....131040.

ψ(N).	N.
28.	29.58.87.116.145.174.232.290.348.435.464.580.696.870.1160.1392.1740.2320.3480.6960.
30.	31.62.77.93.99.124.154.186.198.217.231.248.279.308.341.372.396.434.462.558.616.651.682.693.744.792.868.924.....171864.
32.	128.384.640.1920.2176.6528.10880.32640.
36.	37.74.95.111.135.148.185.190.222.247.259.270.285.296.304.333.351.370.380.432.444.481.494.518.540 555.570.592.665.666.702.703.740.741.760.777.855.888.912.945.962.988.999.....138181680.
40.	41.82.123.164.205.246.328.352.410.451.492.615.656.800.820.902.984.....1082400.
42.	43.49.86.98.129.147.172.196.258.294.301.344.387.392.441.516.588.602.774.882.903.....151704.
44.	115.230.345.368.460.690.920.1104.1380.1840.2760.5520.
46.	47.94.141.188.282.376.564.1128.
48.	119.153.221.238.306.357.442.448.476.576.595.612.663.714.765.832.884.952.....455360.
52.	53.106.159.212.265.318.424.530.636.795.848.1060.1272.1590.2120.2544.3180.4240.6360.12720.
54.	81.162.324.567.648.1134.1539.2268.3078.4536.6156.10773.12312.21546.43092.86184.
56.	928.2784.4640.13920.
58.	59.118.177.236.354.472.708.1416.
60.	61.122.143.155.175.183.225.244.286.305.310.325.350.366.385.403.427.429.450.465.488.495.496.525.549.572.610.620.650.671.700.715.732.770.775.793.806.854.858.900.915.930.975.976.990......6814407600.
64.	256.768.1280.3840.4352.13056.21760.65280.
66.	67.134.161.201.207.268.322.402.414.469.483.536.603.644.804.828.938.966.....776664.
70.	71.142.213.284.426.568.781.852.1562.1704.2343.3124.4686.6248.9372.18744.
72.	73.146.219.292.365.438.511.584.608.657.730.864.876.949.1022.1095.1168.1184.1314.1387.1460.1533.1752.1824.1898.1971.....2017452280.

$\psi(N)$.	N.
78.	79.158.237.316.474.553.632.711.948.1106.1422. 1659.1896.2212.2844.3318.4424.4977.5688.6636. 9954.13272.19908.39816.
80.	187.374.425.561.697.704.748.850.935.1122.1275. 1394.1496.1600.1700.1870.....36801600.
82.	83.166.249.332.498.664.996.1992.
84.	203.215.245.261.377.406.430.490.522.559.609.637. 645.688.735.754.784.812.860.980.1015.1044. 1118.1131.1218.1247.1274.1290.1305.1421.1470. 1505.1508.1624.1677.1720.1827.1885.1911.1935. 1960.....571924080.
88.	89.178.267.356.445.534.712.736.890.1068.1335. 1424.1780.....982560.
90.	209.297.418.589.594.627.836.837.1178.1188.1254. 1463.1672.1674.1767.1881.....9796248.
92.	235.470.705.752.940.1410.1880.2256.2820.3760. 5640.11280.
96.	97.194.291.388.485.582.679.776.873.896.970.1152. 1164.1261.1358.1455.1552.1649.1664.1746 1940. .....86433984o.
100.	101.125.202.250.303.375.404.500.505.606.750.808. 1000.1010.1111.1212.1375.1500.1515.1616.2000. .....6666000.

[R8γ]

SUR LE MOUVEMENT D'UNE BARRE QUI S'APPUIE SUR DEUX DROITES DÉPOLIES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La discussion complète du mouvement d'une barre pesante AB, dont les extrémités sont assujetties à glisser respectivement sur deux droites fixes, rectangulaires, OX, OY, est extrêmement compliquée; mais, si l'on suppose la barre homogène, non pesante, et le coefficient

de frottement sur OX et sur OY ayant la même valeur f, la discussion devient facile et la simplicité de ses résultats lui donne quelque intérêt.

Je suppose la masse de la barre égale à l'unité, sa longueur à $2a$; M désignant son milieu, soit θ l'angle MOX égal à MAO. Je suppose θ' égal à $\frac{d\theta}{dt}$ toujours positif, et je me borne à étudier les circonstances du mouvement quand θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$; on en déduira aisément ce qui se produira quand θ passera dans les quadrants suivants :

Soient X, Y les réactions normales exercées sur B par OY, sur A par OX et comptées positivement dans le sens des axes; les forces de frottement, comptées aussi positivement dans les mêmes sens, sont $\varepsilon f Y$ en A, $\varepsilon' f X$ en B, ε, ε' désignant les facteurs 1 ou -1, de telle sorte qu'on ait

$$(1) \qquad \varepsilon Y > 0, \qquad \varepsilon' X < 0.$$

Le centre de gravité M a pour coordonnées $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, et son mouvement est déterminé par les équations

$$-a(\theta''\sin\theta + \theta'^2\cos\theta) = X + \varepsilon f Y,$$
$$a(\theta''\cos\theta - \theta'^2\sin\theta) = Y + \varepsilon' f X;$$

le théorème sur les moments des quantités de mouvement par rapport au point O donne

$$a^2\theta'' - \tfrac{1}{3}a^2\theta'' = 2aY\cos\theta - 2aX\sin\theta.$$

Nous avons trois équations linéaires d'où l'on peut tirer les valeurs de θ'', X, Y : leur dénominateur commun est

$$P = 2 + \varepsilon\varepsilon' f^2 + 3(\varepsilon + \varepsilon') f \sin\theta\cos\theta.$$

et l'on a

(2) $$P\theta'' = 3f(\varepsilon \sin^2\theta - \varepsilon' \cos^2\theta)\theta'^2,$$

(3) $$\left\{\begin{aligned} PX &= -a(2\cos\theta - \varepsilon f \sin\theta)\theta'^2,\\ PY &= -a(2\sin\theta - \varepsilon' f \cos\theta)\theta'^2.\end{aligned}\right.$$

Cherchons s'il est possible de déterminer *a priori* les valeurs de θ auxquelles conviennent les diverses combinaisons de signes qu'on peut admettre pour ε, ε', eu égard aux conditions nécessaires (1). Je fais une première distinction, qui se justifiera bientôt, suivant que f est $\gtrless \sqrt{2}$.

Supposant d'abord $f < \sqrt{2}$, je considère deux cas :

1° $\varepsilon' = -\varepsilon$. P, égal à $2 - f^2$, est positif et, eu égard aux relations (3), les inégalités (1) deviennent

(4) $$2\varepsilon \sin\theta - f\cos\theta < 0, \qquad 2\varepsilon\cos\theta - f\sin\theta < 0;$$

il faut et il suffit, pour qu'elles soient satisfaites, que ε soit égal à -1 et θ inférieur à l'arc λ dont la tangente est $\frac{2}{f}$.

2° $\varepsilon' = \varepsilon$. P, égal à $2 - f^2 + 3\varepsilon f \sin 2\theta$, n'est plus toujours positif. La combinaison des relations (1) et (3) donne

(5) $$P(2\varepsilon\sin\theta - f\cos\theta) < 0, \qquad P(2\varepsilon\cos\theta - f\sin\theta) > 0.$$

Quel que soit le signe de P, ε doit être égal à -1; on voit alors que P n'est négatif que si θ est compris entre μ et $\frac{\pi}{2} - \mu$, μ étant le plus petit arc positif dont le double a pour sinus $\frac{2-f^2}{3f}$; μ n'est réel que si f est compris entre 1 et 2; mais il nous sera utile de connaître le signe de

$$\sin 2\mu - \sin 2\lambda = \frac{2+f^2}{3f} - \frac{4f}{4+f^2} = \frac{(f^2-2)(f^2-4)}{3f(f^2+4)}.$$

Avec nos hypothèses, λ est $> \frac{\pi}{4}$ et $\sin 2\lambda < \sin 2\mu$. Si l'on suppose $P > 0$, les inégalités (5), où $\varepsilon = -1$, exigent que θ soit $> \lambda$; or, pour toutes les valeurs de θ comprises entre λ et $\frac{\pi}{2}$, P est positif, et les inégalités (5) effectivement satisfaites. Si P devait être négatif, les mêmes inégalités exigeraient que θ fût $< \frac{\pi}{2} - \lambda$, $\sin 2\theta$ étant inférieur à $\sin 2\lambda$ et à $\sin 2\mu$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de $P < 0$, qui doit être rejetée.

De l'analyse précédente, il résulte que si θ est compris entre o et λ, on doit faire $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = 1$; X, Y sont négatifs, et l'équation (2) donne

$$(2 - f^2)\,d\theta' = -3f\theta'\,d\theta, \qquad \theta' = Ce^{-\frac{3f\theta}{2-f^2}}:$$

si θ' prend les valeurs θ'_0 et ω pour $\theta = 0$ et $\theta = \lambda$, on a

$$\omega = \theta'_0\, e^{-\frac{3f\lambda}{2-f^2}}.$$

Quand θ est compris entre λ et $\frac{\pi}{2}$, on fait

$$\varepsilon = \varepsilon' = -1,$$

X devient positif, Y reste négatif et l'équation (2) donne

$$(2 + f^2 - 3f\sin 2\theta)\,d\theta'^2 - 6f\theta'^2\cos 2\theta\,d\theta = 0.$$

$$(2 + f^2 - 3f\sin 2\theta)\,\theta'^2 = C = \frac{(2 - f^2)(4 - f^2)}{4 + f^2}\,\omega^2,$$

et, en appelant θ'_1 la valeur de θ' pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\theta'^2_1 = \frac{(2 - f^2)(4 - f^2)}{(2 + f^2)(4 + f^2)}\, e^{-\frac{6f\lambda}{2-f^2}}\,\theta'^2_0.$$

Quand θ croîtra de $\frac{\pi}{2}$ à π, θ' prendra la suite des va-

leurs que nous lui avons vu prendre dans le premier quadrant, mais toutes multipliées par $\frac{\theta'_1}{\theta'_0}$; un fait analogue se reproduira au passage de θ dans les quadrants suivants et les valeurs correspondantes de θ' décroissent en progression géométrique, ne s'annulant qu'au bout d'un temps infini.

Quand f tend vers $\sqrt{2}$, X et Y tendent vers l'infini. Cherchons ce qui arrive quand f est $> \sqrt{2}$, et, pour cela, reprenons la discussion précédente :

1° $\varepsilon' = -\varepsilon$. P est négatif; les inégalités (4) doivent être renversées, ε est égal à 1 et $\theta > \frac{\pi}{2} - \lambda$.

2° $\varepsilon' = \varepsilon$. Les inégalités (5) subsistent, exigeant $\varepsilon = -1$: il est bon de distinguer deux cas, suivant que f est $\gtrless 2$. Soit d'abord $f > 2$: P est forcément positif et les inégalités (5) exigent $\theta > \frac{\pi}{2} - \lambda$, λ étant ici $< \frac{\pi}{4}$. Si f est compris entre $\sqrt{2}$ et 2, on peut supposer $P \gtrless 0$; s'il est positif, les inégalités (5) exigent que θ soit $> \lambda > \frac{\pi}{4}$; mais maintenant $\sin 2\lambda$ est $> \sin 2\mu$, et l'on ne peut prendre que les valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2} - \mu$ et $\frac{\pi}{2}$. Si P doit être négatif, les inégalités (5) exigent que θ soit $< \frac{\pi}{2} - \lambda$; mais, de ces valeurs, on ne peut accepter que celles qui sont comprises entre μ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$.

On voit que, dans aucun cas, les conditions (1) ne peuvent être satisfaites pour des valeurs de θ inférieures à la plus petite des quantités μ, λ, $\frac{\pi}{2} - \lambda$; pour ces valeurs, le mouvement de AB est impossible; il y a arcboutement; pour les valeurs de θ comprises entre ce

minimum et $\frac{\pi}{2}$, le mouvement devient possible, mais la Mécanique rationnelle ne suffit plus pour déterminer, dans tous les cas, les signes de ε, ε' et la forme de l'équation du mouvement.

[D2c]

NOTE SUR LA FORMULE

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

PAR M. H. PADÉ.

Pour les valeurs réelles de x, la formule qui donne le développement en produit infini de $\sin x$ peut s'établir par une méthode plus simple que celles données ordinairement et qui peut encore être employée dans d'autres circonstances.

D'abord la convergence du produit infini résulte immédiatement de ce que, pour $(p+1)\pi > |x|$, dans les facteurs du produit

$$\left(1 - \frac{x^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(p+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{(p+i)^2\pi^2}\right)$$

sont positifs et plus petits que *un*, en sorte que, quand i augmente, ce produit, positif, diminue et tend par suite vers une limite.

Ceci posé, nous établirons d'abord ce lemme que, si a et b sont deux nombres positifs, $a < b$, la fonction $\frac{\operatorname{tang} az}{\operatorname{tang} bz}$ tend, quand z tend vers zéro, vers sa limite $\frac{a}{b}$ par des valeurs croissantes. La dérivée ne diffère, en effet, que par un facteur positif de la quantité

$$a \sin 2bz - b \sin 2az = -\tfrac{4}{3}ab(b^2 - a^2)z^3 + \ldots.$$

On conclut de là que *la fonction* $1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha z}{\operatorname{tang}^2 \beta z}$, $|\alpha| < |\beta|$, *tend vers sa limite* $1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ *par des valeurs décroissantes*.

Partons alors de la formule bien connue

$$\sin x = \cos^m \frac{x}{m}\, m \operatorname{tang} \frac{x}{m} \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{m}}\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{s\pi}{m}}\right),$$

où m désigne un nombre entier positif et s le nombre entier $\frac{m-2}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, selon que m est pair ou impair. En supposant $s\pi \geqq (p+1)\pi > |x|$, nous l'écrivons

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}\, m \operatorname{tang} \frac{x}{m} \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{p\pi}{m}}\right)} \\ & \quad = \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{(p-1)\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2 \frac{s\pi}{m}}\right). \end{aligned} \right.$$

Quand m croit, chaque facteur du second membre diminue; en outre, il s'introduit de nouveaux facteurs positifs et plus petits que *un*; le second membre diminue donc. Il est manifestement toujours supérieur à la valeur du produit infini

$$\text{(P)} \qquad \left(1 - \frac{x^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(p+2)^2\pi^2}\right)\cdots;$$

il tend donc, lorsque m grandit indéfiniment, vers une

limite *au moins égale* à la valeur de ce produit infini.

D'un autre côté, cette limite est au plus égale à la limite du produit des R premiers facteurs

$$\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(p+1)\pi}{m}}\right)\times\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(p+2)\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tang}^2\frac{(p+R)\pi}{m}}\right),$$

c'est-à-dire *au plus égale* au produit des R premiers facteurs de (P). Dans ces conditions, la limite est la valeur du produit (P).

Si l'on passe aussi à la limite dans le premier membre de (A), ce qui conduit à remplacer les deux premiers facteurs $\cos^m\frac{x}{m}$ et $m\operatorname{tang}\frac{x}{m}$ par 1 et x, et que l'on chasse le dénominateur, on obtient la formule qu'il s'agissait de démontrer.

[O2q]

SUR LES RACCORDEMENTS PAR ARCS DE CERCLE (1);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

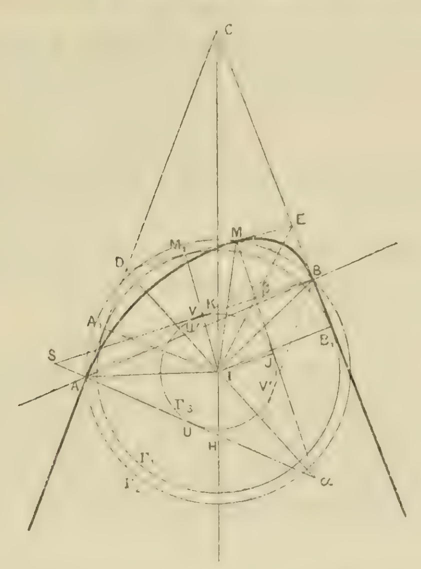
1. Soient AM et BM deux arcs de cercle de centres α et β, tangents entre eux en M et respectivement l'un à AC au point A, l'autre à BC au point B.

(1) Cette Note est extraite du Journal de mission que l'auteur a, comme Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées, rédigé en 1884. Il s'est décidé à la publier parce qu'on y retrouve des théorèmes obtenus d'une autre façon par M. Mannheim, à propos de la construction

Leur tangente commune est DE, et l'on a

(1) $$DA = DM, \qquad EB = EM.$$

Les bissectrices des angles ADM et BEM se coupent au point I, centre du cercle ex-inscrit au triangle CDE,



situé sur la bissectrice de l'angle DCE. Ce cercle ex-inscrit touche CD, CE, DE en A_1, B_1, M_1, et l'on a

(2) $$DA_1 = DM_1, \qquad EB_1 = MM_1.$$

Le rapprochement des égalités (1) et (2) donne immédiatement

$$MM_1 = AA_1 = BB_1 = \frac{CA - CB}{2},$$

de l'anse de panier (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XVI, p. 404). Dans son Journal de mission l'auteur avait en vue les raccordements circulaires entre deux alignements droits d'une route limités en des points inégalement distants du point de rencontre de leurs prolongements. Il suffit de supposer ces alignements rectangulaires pour retomber sur le problème de l'anse de panier à deux arcs.

et, par suite, si $A\alpha$ et $B\beta$ coupent la bissectrice CI en H et K,

$$IH = IK,$$

ce qui montre que *le point* I, milieu de HK qui est indépendant de M, *est un point fixe.*

Par conséquent, le cercle Γ_1 de centre I, tangent à CA et CB, auquel DE est également tangente, est un cercle fixe.

Autrement dit : *L'enveloppe de la tangente commune* DE *est un cercle* Γ_1 *de centre* I *tangent aux droites* CA *et* CB.

Les triangles rectangles IAA_1, IBB_1 et JMM_1 étant égaux comme ayant les côtés de l'angle droit respectivement égaux, il en résulte que

$$IA = IB = IM.$$

Donc : *Le lieu du point de contact* M *est un cercle* Γ_2 *de centre* I *passant par les points* A *et* B.

Enfin la distance IJ de la droite des centres $\alpha\beta$ au point I étant égale à MM_1 est constante et égale à $\frac{CA - CB}{2}$.

Donc : *L'enveloppe de la droite des centres* $\alpha\beta$ *est un cercle* Γ_3 *de centre* I *et de rayon* $\frac{CA - CB}{2}$ [1].

De chacun des points A et B on peut mener au cercle Γ_3 une seconde tangente. Soient U et V les points de contact de AS et BS avec ce cercle, U' et V' ceux des secondes tangentes issues de A et de B.

Si le point de contact de la droite $\alpha\beta$ et du cercle Γ_3 est sur un des arcs UU' ou VV' les cercles AM et MB sont tangents *intérieurement,* mais dans le premier cas

---

[1] On reconnaît, dans ces deux derniers théorèmes, ceux qui ont été obtenus, pour l'anse de panier, par M. Mannheim.

le point M est *intérieur au triangle* ACB, dans le second il lui est *extérieur*.

Si le point de contact de $\alpha\beta$ est sur un des arcs UV′ ou VU′ les cercles AM et MB sont tangents *extérieurement*.

Donc, lorsqu'il s'agit d'effectuer un raccordement, *le point de contact de* $\alpha\beta$ *avec le cercle* Γ_3 *ne doit être pris que sur l'arc* VV′.

Le segment $\alpha\beta$ de la tangente au cercle Γ_3 compris entre les droites SA et SB est égal à la différence des rayons des arcs de raccordement : ce segment est minimum lorsque la droite $\alpha\beta$ forme avec SA et SB un triangle isoscèle, c'est-à-dire est parallèle à la bissectrice CI.

On obtient donc le raccordement par deux arcs de cercle dont la différence des rayons est minimum en menant au cercle Γ_3 *la tangente parallèle à la bissectrice de l'angle* ACB, *dont le point de contact se trouve entre ceux des tangentes menées à ce cercle de celui des points* A *ou* B *qui est le plus rapproché du point* C.

[B2a]

SUR UN SYSTÈME REMARQUABLE DE *n* RELATIONS ENTRE DEUX SYSTÈMES DE *n* QUANTITÉS;

Par M. G. FONTENÉ,

Professeur au Collège Rollin.

I.

1. La discussion du système connu d'équations

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ bx + cy + az = 0, \\ cx + ay + bz = 0. \end{cases}$$

ou, en remplaçant x, y, z par z, y, x,

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} az + by + cx &= 0,\\ bz + cy + ax &= 0,\\ cz + ay + bx &= 0,\end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} ax + (bz + cy) &= 0,\\ by + (cx + az) &= 0,\\ cz + (ay + bx) &= 0,\end{aligned}\right.$$

conduit à ceci. Soient n quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et n autres quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liées par les n relations homogènes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1 x_n + u_2 x_{n-1} + \ldots + u_n x_1 = 0,\\ &u_2 x_n + u_3 x_{n-1} + \ldots + u_1 x_1 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &u_n x_n + u_1 x_{n-1} + \ldots + u_{n-1} x_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

la loi étant que le résidu de la somme des deux indices par rapport au diviseur n est constant dans chaque relation, et prend les valeurs successives 1, 2, ..., 0. Dans ce qui suit, un indice plus grand que n doit être remplacé par son résidu relatif au diviseur n.

Nous montrerons d'abord qu'une solution en donne d'autres.

Une solution du système étant

$$(\mathrm{M})\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1 = m_1, \quad u_2 = m_2, \quad \ldots,\\ &x_1 = \mu_1, \quad x_2 = \mu_2, \quad \ldots,\end{aligned}\right.$$

inscrivons les n quantités m aux sommets d'un polygone régulier convexe en allant de gauche à droite, les n quantités μ aux sommets d'un polygone régulier convexe en allant de gauche à droite, et convenons de dire que ces deux polygones convexes, parcourus de gauche à droite à partir des sommets m_1 et μ_1 représentent une solution. Deux contours obtenus en prenant les sommets de k en

h, k étant premier avec n, à partir de deux sommets quelconques m_r et μ_s, représentent encore une solution, c'est-à-dire que l'on peut prendre

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = m_r, & u_2 = m_{r+k}, & u_3 = m_{r+2k}, & \ldots, \\ x_1 = \mu_s, & x_2 = \mu_{s+k}, & x_3 = \mu_{s+2k}, & \ldots; \end{array}\right.$$

en effet, la $(\lambda+1)^{\text{ième}}$ relation du système (1), commençant par $u_{\lambda+1}x_n$, sera satisfaite si l'on a

$$m_{r+\lambda k}\mu_{s+(n-1)k} + m_{r+(\lambda+1)k}\mu_{s+(n-2)k} + \ldots = 0,$$

les n indices des m, par exemple, étant distincts, et la somme des indices étant constante; or, cela a lieu par hypothèse. Deux valeurs de k complémentaires par rapport à n donnent les mêmes polygones réguliers, mais parcourus une fois dans un sens, une fois dans le sens contraire, ce qui correspond à des solutions distinctes.

De plus, on peut prendre pour les u les valeurs μ, pour les x les valeurs m; en effet, d'après la loi des relations (1), chacune de ces relations se reproduit quand on échange u_1 et x_1, u_2 et x_2, ..., et cette remarque suffit à démontrer le fait énoncé.

En particulier, on peut prendre, avec $k = n - 1$, $r = s$,

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1 = \mu_r, & u_2 = \mu_{r-1}, & u_3 = \mu_{r-2}, & \ldots, \\ x_1 = m_r, & x_2 = m_{r-1}, & x_3 = m_{r-2}, & \ldots, \end{array}\right.$$

ce qui revient à échanger, dans la première solution, u_1 et x_r, u_2 et x_{r-1}, ..., la somme des indices étant $r+1$, c'est-à-dire les facteurs qui s'accompagnent, dans la $(r+1)^{\text{ième}}$ des relations (1); pour $r = n$, on échange u_1 et x_n, u_2 et x_{n-1}, ..., c'est-à-dire les facteurs qui s'accompagnent dans la première des relations (1); si l'on remplace la notation x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ... par la

notation $X_1, X_2, X_3, \ldots$ qui peut paraître plus naturelle, c'est ce dernier fait qui apparaît d'abord : la différence des indices étant alors constante dans chacune des relations (1), et prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, si l'on échange u_1 et X_1, u_2 et X_2, la première relation se reproduit, et l'ordre des $n-1$ autres est renversé.

2. Voici maintenant ce que l'on peut appeler la *résolution* du système (1). Ayant observé que les n relations, considérées comme des équations en $x_1, x_2, \ldots$, se réduisent à une seule si l'on a

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_1} = \sqrt[n]{1},$$

et reconnu ainsi le rôle des racines n^{iemes} de l'unité dans la question, désignons par θ une racine de l'équation binome

$$(2) \qquad \theta^n - 1 = 0,$$

et ajoutons les relations (1) multipliées respectivement par $\theta^{n-1}, 1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-2}$; nous aurons

$$(u_1 + \theta u_2 + \ldots + \theta^{n-1} u_n)(x_1 + \theta x_2 + \ldots + \theta^{n-1} x_n) = 0,$$

les u et les x étant ainsi séparés. En donnant à θ les n valeurs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, nous aurons un système de relations équivalent au système (1), attendu que le déterminant des multiplicateurs employés pour déduire le nouveau système du premier, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_n \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \ldots & \theta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_1^{n-1} & \theta_2^{n-1} & \ldots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

est le produit des différences des n quantités θ prises

deux à deux, et n'est par conséquent pas nul. Dès lors, pour satisfaire au système (1), il faut avoir

$$(3)\quad \begin{cases} u_1+\theta_1 u_2+\theta_1^2 u_3+\ldots+\theta_1^{n-1} u_n=0, \\ u_1+\theta_2 u_2+\theta_2^2 u_3+\ldots+\theta_2^{n-1} u_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_1+\theta_p u_2+\theta_p^2 u_3+\ldots+\theta_p^{n-1} u_n=0, \end{cases}$$

avec

$$(4)\quad \begin{cases} x_1+\theta_{p+1} x_2+\theta_{p+1}^2 x_3+\ldots+\theta_{p+1}^{n-1} x_n=0, \\ x_1+\theta_{p+2} x_2+\theta_{p+2}^2 x_3+\ldots+\theta_{p+2}^{n-1} x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1+\theta_n x_2+\theta_n^2 x_3+\ldots+\theta_n^{n-1} x_n=0, \end{cases}$$

les θ étant partagés en deux groupes, et l'on aura *différents genres de solutions* selon la valeur de p, qui pourra être 0, 1, 2, 3, ..., n, et selon la façon dont on effectuera le partage des θ en deux groupes ; on peut dire que la solution donnée par les formules (3) et (4) est du genre $(p, n-p)$.

3. On peut modifier la forme de la réponse en exprimant les u en fonction de $n-p$ paramètres et les x en fonction de p paramètres. Pour les u, par exemple, il faut connaître $n-p$ solutions distinctes du système (3), et nous reviendrons sur le sens bien connu du mot *distinctes* dans les questions de ce genre ; or on a précisément les solutions

$$u_1=1, \qquad u_2=\frac{1}{\theta_{p+j}}, \qquad u_3=\frac{1}{\theta_{p+j}^2}, \qquad \ldots, \qquad u_n=\frac{1}{\theta_{p+j}^{n-1}},$$

j prenant les valeurs 1, 2, ..., $n-p$, et ces $n-p$ solutions sont distinctes. D'abord ce sont des solutions, c'est-à-dire que l'on a

$$1+\left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)+\left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^2+\left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^3+\ldots+\left(\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}\right)^{n-1}=0,$$

i prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., p : en effet, $\frac{\theta_i}{\theta_{p+j}}$ est

une racine de l'équation (2), autre que 1, et elle satisfait, par suite, à l'équation obtenue en divisant le premier membre de l'équation (2) par $\theta - 1$, c'est-à-dire à l'équation

$$\theta^{n-1} + \theta^{n-2} + \ldots + \theta + 1 = 0.$$

Le système (3) admet donc la solution

$$(3')\quad \begin{cases} u_1 = a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_n, \\ u_2 = \dfrac{a_{p+1}}{\theta_{p+1}} + \dfrac{a_{p+2}}{\theta_{p+2}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\theta_n}, \\ u_3 = \dfrac{a_{p+1}}{\theta^2_{p+1}} + \dfrac{a_{p+2}}{\theta^2_{p+2}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\theta^2_n}, \\ \dotfill \\ u_n = \dfrac{a_{p+1}}{\theta^{n-1}_{p+1}} + \dfrac{a_{p+2}}{\theta^{n-1}_{p+2}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\theta^{n-1}_n}, \end{cases}$$

les $n - p$ quantités a étant des paramètres arbitraires. En outre, les $n - p$ solutions indiquées sont distinctes, c'est-à-dire ne satisfont pas à une même relation linéaire et homogène, attendu que, dans la matrice à laquelle elles donnent lieu, matrice que l'on peut lire sur le Tableau (3′), le premier déterminant, par exemple, est différent de zéro; les formules (3′) donnent donc la solution générale du système (3). Je rappelle le raisonnement qui démontre rigoureusement ce fait. Le système (3) détermine les p dernières quantités u en fonction des $n - p$ premières, que l'on peut se donner à volonté; or c'est aussi ce qui a lieu avec les formules (3′), et l'on peut disposer des $n - p$ paramètres a pour donner aux $n - p$ premières quantités u des valeurs quelconques; car, si l'on se donne les valeurs des $n - p$ premières quantités u, on a $n - p$ équations entre les $n - p$ quantités a, et ce système d'équations a une solution, le déterminant des coefficients des inconnues étant différent de zéro, comme on l'a dit. On peut

donc regarder indifféremment les n quantités u comme liées par les p relations (3), ou comme données par les formules (3′), qui renferment $n-p$ paramètres arbitraires a.

De même, on peut remplacer les $n-p$ relations (4) entre les n quantités x par les formules suivantes, qui renferment p paramètres arbitraires α :

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p,\\ x_2 &= \frac{\alpha_1}{\theta_1} + \frac{\alpha_2}{\theta_2} + \frac{\alpha_3}{\theta_3} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p},\\ x_3 &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^2} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^2} + \frac{\alpha_3}{\theta_3^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^{n-1}} + \frac{\alpha_3}{\theta_3^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\theta_p^{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

4. Finalement on peut remplacer le système (1) par un système formé :

D'une part, des p relations (3) ou des formules (3′);

D'autre part, des $n-p$ relations (4) ou des formules (4).

Il pourra être avantageux de prendre les formules (3′) et les relations (4), ... Si l'on prend les formules (3′) et les formules (4′), on peut dire que, avec n paramètres a et n paramètres α, liés par les n relations

$$(5)\qquad a_1\alpha_1 = 0,\qquad a_2\alpha_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad a_n\alpha_n = 0,$$

la solution générale du système (1) est

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u_\lambda &= \frac{a_1}{\theta_1^{\lambda-1}} + \frac{a_2}{\theta_2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{a_n}{\theta_n^{\lambda-1}},\\ x_\lambda &= \frac{\alpha_1}{\theta_1^{\lambda-1}} + \frac{\alpha_2}{\theta_2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\theta_n^{\lambda-1}}; \end{aligned}\right.$$

on vérifie aisément que ces formules satisfont aux relations (1).

5. Les faits énoncés au n° 1 se vérifient facilement sur les relations (3) et (4), ou sur les formules (3′) et (4′).

Le système [(3) (4)] admettant la solution (M), la $i^{\text{ième}}$ des relations (3) donne

$$m_1 + \theta_i m_2 + \theta_i^2 m_3 + \ldots = 0,$$

ou

$$m_r + \theta_i m_{r+1} + \theta_i^2 m_{r+2} + \ldots = 0.$$

ou encore

$$m_r + \theta_i^k m_{r+k} + \theta_i^{2k} m_{r+2k} + \ldots = 0,$$

k étant premier avec n afin d'obtenir tous les termes, ou, en posant $\theta_i^k = \Theta_i$,

$$m_r + \Theta_i m_{r+k} + \Theta_i^2 m_{r+2k} + \ldots = 0;$$

la $j^{\text{ième}}$ des relations (4) donne de même

$$\mu_s + \Theta_j \mu_{s+k} + \Theta_j^2 \mu_{s+2k} + \ldots = 0;$$

comme θ_1, θ_2, ..., pris dans leur ensemble, sont θ, θ^2, ..., θ étant une racine primitive de l'équation (2), les quantités Θ sont θ^k, $(\theta^k)^2$, ..., c'est-à-dire θ_1, θ_2, ..., puisque θ^k est une racine primitive de l'équation (2). Il suit de là que l'on a une solution du système (1) en prenant $u_1 = m_r$, $u_2 = m_{r+k}$, ..., $x_1 = \mu_s$, $x_2 = \mu_{s+k}$, ...; elle correspond à un système de θ que l'on obtient en remplaçant chacun des premiers θ par sa puissance $k^{\text{ième}}$; pour $k = n - 1$, chaque θ est remplacé par son inverse.

La symétrie entre les u et les x est, d'ailleurs, en évidence dans les relations (3) et (4), ou dans les formules (3′) et (4′); le système admettant la solution (M) et celles qui s'en déduisent comme on vient de dire, on

a aussi la solution

$$\begin{cases} u_1 = \mu_1, & u_2 = \mu_2, & \dots, \\ x_1 = m_1, & x_2 = m_2, & \dots \end{cases}$$

et celles qui s'en déduisent; si la première solution est du genre $(p, n-p)$, les u vérifiant p relations, les x vérifiant $n-p$ relations, la seconde est du genre $(n-p, p)$, les u vérifiant $n-p$ relations, les x vérifiant p relations. (Relativement au fait particulier signalé au n° 1, et correspondant à $k = n-1$, $r = s$, on peut remarquer que la substitution à chaque θ de sa puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ n'est pas autre chose que la substitution, à chaque θ, de son inverse.)

II.

6. Si dans le système (1), on regarde les x comme des inconnues, on est amené à considérer l'expression

$$(7)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & k & l \\ b & c & d & \dots & l & a \\ c & d & e & \dots & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ k & l & a & \dots & i & j \\ l & a & b & \dots & j & k \end{vmatrix} \times (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.$$

Par analogie avec la remarque faite au début du n° 2, on peut observer que l'hypothèse $\Delta = 0$ entraîne, comme conséquence de faits bien connus, les relations suivantes entre les premiers mineurs,

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \dots = \frac{L}{A} = \frac{1}{\theta}, \qquad \theta^n = 1,$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad \frac{A}{1} = \frac{B}{\theta} = \frac{C}{\theta^2} = \dots = \frac{L}{\theta^{n-1}}.$$

et, par suite,

$$(9) \qquad a + b\theta + c\theta^2 + \ldots + l\theta^{n-1} = 0;$$

on en conclut

$$(10) \qquad \Delta = \prod (a + b\theta + c\theta^2 + \ldots + l\theta^{n-1});$$

on peut le voir directement. La relation identique

$$\theta'^{n-1} + \theta'^{n-2}\theta + \theta'^{n-3}\theta^2 + \ldots = 0,$$

$\theta' \neq \theta$, donne alors

$$A\theta'^{n-1} + B\theta'^{n-2} + C\theta'^{n-3} + \ldots = 0,$$

comme conséquence de l'hypothèse (9), et il en résulte que le premier membre de la relation que l'on vient d'écrire est, à un facteur numérique près, le produit des facteurs $a + b\theta + c\theta^2 + \ldots$ fournis par les θ autres que θ'; appliquant ce fait à θ, on a

$$(11) \quad \Delta = (a + b\theta + c\theta^2 + \ldots)(A + B\theta^{n-1} + C\theta^{n-2} + \ldots),$$

et on le vérifie aisément.

Pour $n = 4$, par exemple, la formule (10) donne

$$\Delta = (a^2 - c^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 + 4ac(b^2 + d^2) - 4bd(a^2 + c^2).$$

III.

7. Pour $n = 3$, la discussion du système (α) se réduit à ceci :

1° Si l'on a

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

les quantités x, y, z sont quelconques;

2° Les trois équations se réduisent à une seule,

$$x + \theta y + \theta^2 z = 0,$$

si l'on a

$$\frac{a}{\theta^2} = \frac{b}{\theta} = \frac{c}{1},$$

avec $\theta^3 = 1$;

3° Si l'on a

$$a + b\theta + c\theta^2 = 0,$$

sans être dans le cas précédent avec θ' ou θ'', on a

$$\frac{x}{\theta^2} = \frac{y}{\theta} = \frac{z}{1};$$

4° Si l'on a

$$(a + b\theta + c\theta^2) \times \ldots \times \ldots = 0,$$

on a

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

8. On a alors

(12) $$\Delta = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

A propos de la formule (10) appliquée à ce cas, soit

(13) $$\Delta = (a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha),$$

α étant une racine primitive de l'équation binome $\theta^3 = 1$, observons que l'hypothèse

$$a + b\theta + c\theta^2 = 0 \quad \text{ou} \quad b\theta - c\theta^2 = -a,$$

donne facilement, par une élévation au cube, $\Delta = 0$; de là deux remarques. D'abord, si l'on regarde l'égalité

(14) $$a^3 - 3abc + (b^3 + c^3) = 0$$

comme une équation en a, dont les racines sont $-b\theta - c\theta^2$, l'identification avec l'équation

$$a^3 + pa + q = 0$$

donne une méthode de résolution de l'équation du troisième degré, identique au fond à la méthode classique; on peut dire que l'on identifie l'équation à résoudre avec celle que donne l'annulation du produit (13). D'autre part, étant donnée l'équation

(15) $$\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P} = 0.$$

on obtient d'abord

(16) $$M + N + P - 3\sqrt[3]{MNP} = 0.$$

par un calcul qui revient à effectuer le produit (13) avec $\sqrt[3]{M}$ au lieu de a, ...; *a priori*, le premier membre de l'équation finale

$$(M - N + P)^3 - 27MNP = 0$$

est un produit de neuf facteurs.

L'identité

(17) $$\Delta = (a + b + c)(A + B + C),$$

avec $A = a^2 - bc$, ..., est employée quand on commence la transformation de la fraction

(18) $$\frac{1}{\sqrt[3]{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P}};$$

on pose $\sqrt[3]{M} = a$, ..., et l'on multiplie les deux termes de la fraction par le facteur $A + B + C$; c'est du moins la méthode la plus simple.

Le facteur $A + B + C$ est essentiellement positif, nul seulement pour $a = b = c$; on en conclut

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geqq abc,$$

ou

(19) $$\frac{M + N + P}{3} \geqq \sqrt[3]{MNP}.$$

dans l'hypothèse

$$a + b + c \geqq 0$$

ou

(20) $$\sqrt{M} + \sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{P} \geqq 0;$$

pour M, N, P positifs, cela rentre dans un théorème général.

[L¹1a]

SUR LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES CONIQUES;

PAR M. L. RIPERT,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le Tableau par lequel on résume ordinairement la discussion de l'équation générale

$$(1) \qquad AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXT + 2EYT + FT^2 = 0$$

ne donne que l'espèce de la conique; mais l'examen de l'équation donne d'autres résultats. Nous posons

$$h = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2, \qquad a = CF - E^2,$$
$$b = DE - BF, \qquad \ldots, \qquad e = BD - AE, \qquad f = AC - B^2.$$

THÉORÈME I. — *L'espèce d'une courbe du deuxième ordre donnée par l'équation* (1) *et sa situation tant par rapport à la droite de l'infini qu'à l'origine, sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :*

<table>
<tr><td rowspan="3">$f > 0$.
oniques coupant la ite de l'infini en deux nts imaginaires.</td><td colspan="2">$Ah > 0$</td><td>Ellipse imaginaire.</td><td rowspan="5">L'origine est, pour :
$AF < 0$, intérieure ;
$F = 0$, sur la courbe ;
$AF > 0$, extérieure.
Les coordonnées du centre sont :
$x = d,\ y = e,\ t = f$.
L'équation de la polaire de l'origine est :
$DX + EY + FT = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h = 0$</td><td>Point réel d'intersection de deux droites imaginaires.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Ah < 0$</td><td>Ellipse réelle.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f < 0$.
oniques coupant la ite de l'infini en deux nts réels et distincts.</td><td colspan="2">$h \gtrless 0$</td><td>Hyperbole.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h = 0$</td><td>Deux droites réelles se coupant en un point fini.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$f = 0$.
oniques coupant la ite de l'infini en deux nts confondus.</td><td colspan="2">$h \gtrless 0$</td><td>Parabole.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$h = 0$</td><td>a ou $c > 0$</td><td>Deux parallèles imaginaires</td><td rowspan="3">se coupant en un point réel de la droite de l'infini.</td></tr>
<tr><td>$a = c = 0$</td><td>Deux parallèles confondues</td></tr>
<tr><td>a ou $c < 0$</td><td>Deux parallèles réelles et distinctes</td></tr>
</table>

De ce théorème on passe immédiatement, par corrélation, au théorème suivant :

Théorème II. — *La situation, tant par rapport à l'origine qu'à la droite de l'infini et l'espèce d'une courbe de deuxième classe donnée par l'équation*

$$(2)\qquad AU^2 + 2BUV + CV^2 + 2DUR + 2EVR + FR^2 = 0$$

sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :

$f > 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (intérieure) deux tangentes imaginaires.	$Ah > 0$		Conique imaginaire.	L'espèce de la nique est, pour : $AF < 0$, ellipse; $F = 0$, parabol $AF > 0$, hyperbo
	$h = 0$		Droite réelle de jonction de deux points imaginaires.	
	$Ah < 0$		Conique réelle.	
$f < 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (extérieure) deux tangentes réelles et distinctes.	$h \neq 0$		Conique réelle.	Les coord. de la laire de l'origine s $u = d$, $v = e$, r L'équation du ce est : $DU + EV + FR$
	$h = 0$		Deux points réels sur droite de jonction finie.	
$f = 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (sur la courbe) deux tangentes confondues.	$h \neq 0$		Conique réelle.	
	$h = 0$	a ou $c > 0$	Deux points imaginaires	sur droite de jo tion réelle pass par l'origine.
		$a = c = 0$	Deux points confondus	
		a ou $c < 0$	Deux points réels et distincts	

On peut ajouter d'autres détails, tous corrélatifs.

Supposons maintenant que X, Y, T soient des coordonnées *trilinéaires normales*, $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ étant les équations des côtés a_1, a_2, a_3 du triangle de référence $A_1 A_2 A_3$. Il est alors facile de voir que :

L'équation (1) représente une conique ne coupant pas, touchant ou coupant le côté a_3, selon que l'on a $f \gtreqless 0$. La conique est imaginaire si l'on a $f > 0$, $Ah > 0$ (ou encore $f = h = 0$, a ou $c > 0$); elle est réelle dans tous les autres cas. Le point ($f > 0$, $h = 0$) n'est pas sur a_3, non plus que le point commun aux droites

$(f<0, h=0)$; les droites $(f=h=0)$ se coupent sur a_3. Le sommet A_3 est intérieur ou extérieur, selon que l'on a $AF \lessgtr 0$. Les coordonnées du pôle de a_3 sont d, e, f; l'équation de la polaire de A_3 est

$$DX + EY + FT = 0.$$

Résultats analogues pour les couples (a_1, A_1) et (a_2, A_2).

La conique est ellipse, parabole ou hyperbole, selon que l'on a

$$\varphi = a_1^2 a + 2 a_1 a_2 b + a_2^2 c + 2 a_1 a_3 d + 2 a_2 a_3 e + a_3^2 f \gtrless 0.$$

Les coordonnées du centre sont φ'_{a_1}, φ'_{a_2}, φ'_{a_3}.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, par passage direct de l'équation (1) à l'équation (2), les résultats corrélatifs.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1898.

Mathématiques spéciales.

Étant donné un ellipsoïde E, on considère tous les systèmes de diamètres conjugués égaux de cette surface.

On désigne par α, β, γ les points où les trois diamètres de l'un quelconque de ces systèmes rencontre le plan tangent à l'ellipsoïde E en l'une des extrémités C du petit axe CC'.

Cela étant, on demande de trouver :

1° Le lieu des sommets des triangles $\alpha\beta\gamma$;

2° L'enveloppe des côtés de ces triangles;

3° L'enveloppe des cercles circonscrits aux mêmes triangles;

4° Supposant l'ellipsoïde de révolution autour du plus petit des axes CC', trouver le lieu des sommets des sections faites dans l'ellipsoïde par les plans diamétraux passant par deux diamètres conjugués égaux.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1898.

Composition de Mathématiques.

On considère une sphère (S) de rayon R, qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, et un paraboloïde (P) qui a pour plan directeur xOy et pour directrices : 1° l'axe Oz ; 2° la droite AB définie par les points A et B dont les coordonnées x, y, z sont respectivement (R, o. R) et (a, b, c).

I. Former les équations de la sphère et du paraboloïde.

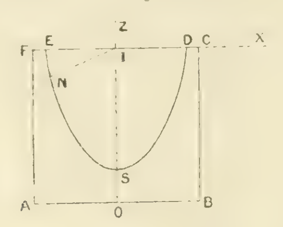
II. On prend un point M sur Oz et les plans polaires $[\Sigma]$ et $[\Pi]$ de ce point par rapport aux surfaces (S) et (P). Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans, quand M décrit Oz : déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde (P).

III. En supposant AB à 45° sur Oz et tangente à la sphère (S) au point B, dans le trièdre $Oxyz$, calculer les coordonnées a, b, c du point B en fonction de R : déterminer les génératrices du paraboloïde (P) qui sont tangentes à la sphère (S); calculer le nombre de centièmes de la cote c du point B, quand R est égal à 1.

On conservera les notations indiquées.

Épure.

Un solide en forme de creuset ABCDEFS repose sur le plan horizontal. Il est formé d'un cylindre droit à base circulaire



dont le diamètre AB est égal à 16^{cm} et la hauteur AF à 11^{cm}. La cavité ESD a la forme d'un paraboloïde de révolution

autour de l'axe Oz du cylindre; son diamètre supérieur $ED = 15^{cm}$, sa profondeur $IS = 9^{cm},5$.

On fera coïncider l'axe Oz du solide avec l'axe vertical de la feuille; sa projection horizontale sera placée à 13^{cm} du bord inférieur de la feuille et la projection verticale du point I à 4^{cm} au-dessous du bord inférieur du cadre.

La partie du solide à droite du plan de profil passant par Oz a été échancrée par un cylindre, dont l'axe IX est l'horizontale de front menée par le centre I de l'ouverture de la cavité et dont le rayon est égal à la plus courte distance IX du point I à la surface parabolique intérieure.

Le solide est éclairé par des rayons parallèles de front venant d'en haut, à 45°, de gauche à droite.

On demande : 1° de représenter par ses projections le solide échancré, les parties vues en traits noirs pleins, les parties cachées en pointillé; 2° de représenter par des hachures ou par une teinte noire légère, à volonté, les ombres déterminées sur la surface extérieure et intérieure du solide et sur le plan horizontal.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer les points remarquables de l'épure.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Ripert.

L'article de M. Mangeot *Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques* (*N. A.*, mai 1898, p. 215) peut donner un certain intérêt à la remarque ci-après :

On sait que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point (α, β) soit centre de la courbe $f(x, y) = 0$ s'obtiennent en exprimant que toutes les dérivées de f dont l'ordre de parité est contraire à l'ordre m s'annulent quand on y remplace les variables par les coordonnées du point.

Par suite, si un centre existe, ses premières équations (qui le déterminent) sont toujours

$$f^{m-1}_{x^{m-1}} = 0, \qquad f^{m-1}_{y^{m-1}} = 0.$$

Or, si

$$f = \varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

avec

$$\varphi_m = \mathrm{A} x^m + m \mathrm{B} x^{m-1} y + \ldots + m \mathrm{B}' x y^{m-1} + \mathrm{A}' y^m,$$
$$\varphi_{m-1} = m \mathrm{C} x^{m-1} + \ldots + m \mathrm{C}' y^{m-1},$$

on a, à un facteur près,

$$f^{m-1}_{x^{m-1}} = \mathrm{A} x + \mathrm{B} y + \mathrm{C}, \qquad f^{m-1}_{y^{m-1}} = \mathrm{B}' x + \mathrm{A}' y + \mathrm{C}',$$

et, par conséquent, le centre, s'il existe, a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{\mathrm{BC}' - \mathrm{CA}'}{\mathrm{AA}' - \mathrm{BB}'}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{B}'\mathrm{C} - \mathrm{C}'\mathrm{A}}{\mathrm{AA}' - \mathrm{BB}'}.$$

On essayera si ce point *déterminé* est centre de la courbe [1].

On voit de même que si une surface $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ est pourvue d'un centre, les équations déterminant ce centre sont les équations *du premier degré :*

$$\mathrm{F}^{m-1}_{x^{m-1}} = 0, \qquad \mathrm{F}^{m-1}_{y^{m-1}} = 0, \qquad \mathrm{F}^{m-1}_{z^{m-1}} = 0,$$

d'où résulte l'essai d'un point déterminé, etc.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

TH. CARONNET. — Problèmes de Mécanique; Paris, Nony, 1898.

F. KLEIN. — Sur la Géométrie dite *non euclidienne,* trad. par L. LAUGEL (Extrait des *Mém. de la Fac. des Sciences de Toulouse,* t. XI; 1898).

F. GERBALDI. — Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane (Extrait des *Rendic. del Circolo matem. di Palermo;* 1898).

M. PIERI. — I principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo (Extrait des *Mém. de l'Ac. des Sc. de Turin*); 1897-1898.

---

(1) Il suffit, pour que (α, β) ne soit pas centre, qu'une seule des dérivées $f^{m-1}_{x^{m-2}y}$, $f^{m-1}_{x^{m-3}y^2}$, ... ne s'annule pas. On sera ordinairement fixé par l'examen de ces équations du premier degré, puisque le cas général est celui où il n'y a pas de centre.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; t. XII, 1898.

G. Gallucci. — Studio sui tetraedri biomologici (Extrait des *Rend. della R. Acc. d. Sc. f. e mat. di Napoli*; 1898).

Atti della reale Accademia dei Lincei. — Rendiconti; classe di Sc. fisiche, matem. e natur. Rome, 1898.

Bulletin astronomique. — T. XV. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Zeitschrift für math. und. naturw. Unterricht, publié par J.-C.-V. Hoffmann. Leipzig, 1898.

Dr R. Haussner. — Tafeln für Goldbach'sche Gesetz. Halle, 1897.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. — T. CXXVI. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery; 2e série, t. XXII. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Bulletin de Mathématiques spéciales, publié par L. Gérard, G. de Longchamps, B. Niewenglowski; 4e année, 1897-1898. Paris, Société d'éditions scientifiques.

Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires, publié par L. Gérard, G. de Longchamps et B. Niewenglowski; 3e année, 1897-1898. Société d'éditions scientifiques.

Charlotte A. Scott. — On plane cubics. (Extr. des *Phil. Transact. of the Royal Soc. of London.*) Londres, 1894.

Charlotte A. Scott. — Note on adjoint curves. (Extr. du *Quart. Journal of pure and appl. Math.*, 1896.)

Charlotte A. Scott. — The three great problems of antiquity considered in the light of modern mathematical research. (Extr. du *Bull. of the american math. Soc.*, 1896.)

Charlotte A. Scott. — On Cayley's theory of the absolute. (Extr. du *Bull. of the american math. Soc.*, 1897.)

Charlotte A. Scott. — On the numerical characteristic of a cubic curve.

E. Hammer. — Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart, 1897.

W.-W. Rouse Ball. — Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes, trad. par J. Fitz-Patrick. Paris, A. Hermann; 1898.

F. Klein. — Conférences sur les Mathématiques faites au Congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago; trad. par L. Laugel. Paris, A. Hermann; 1898.

Mathematische Annalen, dirigé par F. Klein, W. Dick et A. Mayer; B. 51. Leipzig, 1898.

Isabel Maddison. — On singular solution of differential equation, etc. (Extr. du *Quart. Journal of Mathematics*, 1896.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1556

(1885, p. 535).

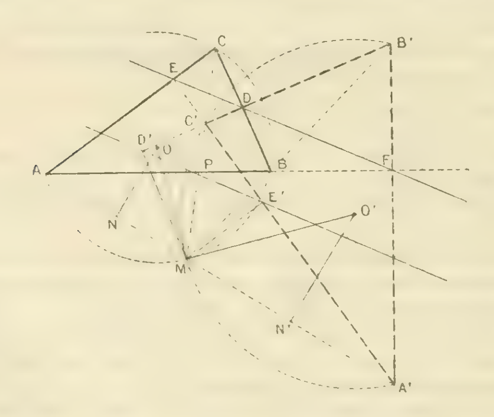
Les perpendiculaires aux côtés d'un triangle donné ABC, *aux points où ils sont rencontrés par une transversale quelconque d, forment un nouveau triangle* A′B′C′.

Démontrer : que les droites AA′, BB′, CC′ *se coupent en un même point* M *commun aux circonférences* ABC *et* A′B′C′; *que celles-ci sont orthogonales et que les droites de Simson du point* M, *par rapport aux deux triangles, sont parallèles à d.* NEUBERG.

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Le triangle A′B′C′, formé par les perpendiculaires élevées sur les côtés du triangle ABC aux points E, D, F où ils sont rencontrés par la droite d, est évidemment semblable à ce



même triangle. De plus, ces deux triangles sont homologiques et les droites AA′, BB′, CC′, qui joignent les sommets correspondants, concourent au centre d'homologie M. Cette propriété peut se démontrer ainsi.

Prenant le triangle ABC pour triangle de référence, les

droites AD, BE auront pour équations

$$m\beta - n\gamma = 0, \qquad n\gamma - l\alpha = 0,$$

et la droite ED sera représentée par $m\beta - n\gamma + l\alpha = 0$. Une droite $m\beta - n\gamma - k\alpha = 0$ passant par le point D sera perpendiculaire à CB ou $\alpha = 0$, si $k = n\cos B - m\cos C$; la perpendiculaire B′C′ a donc pour équation

$$m\beta - n\gamma + (m\cos C - n\cos B)\alpha = 0.$$

De même, les perpendiculaires C′A′, B′A′ ont pour équations

$$n\gamma - l\alpha + (n\cos A - l\cos C)\beta = 0,$$
$$l\alpha + m\beta + (m\cos A + l\cos B)\gamma = 0.$$

On trouve ensuite que les droites AA′, BB′, CC′ sont représentées par

$$\beta(m + n\cos A - l\cos C) + \gamma(n + m\cos A + l\cos B) = 0,$$
$$\alpha(l - m\cos C + n\cos B) + \gamma(n + m\cos A + l\cos B) = 0,$$
$$\beta(m + n\cos A - l\cos C) - \alpha(l - m\cos C + n\cos B) = 0;$$

on voit donc qu'*elles sont concourantes*.

A l'aide de ces équations, on reconnaît que AA′ fait avec AB le même angle que CC′ avec CB, c'est-à-dire que $\widehat{MAB} = \widehat{BCM}$.

Le quadrilatère ACBM est donc inscriptible; mais $\widehat{BMA'} = \widehat{ACB} = C'$, le quadrilatère A′B′C′M l'est aussi et les cercles circonscrits O, O′ aux triangles ABC, A′B′C′ ont un point commun M où ils se coupent orthogonalement. En effet, si l'on abaisse sur AA′ les perpendiculaires ON, O′N′, on a

$$\widehat{NOM} = \widehat{ACM} = \widehat{ECC'}, \qquad \widehat{MO'N'} = \widehat{MC'A'} = \widehat{CC'E},$$

donc

$$\widehat{NOM} = \widehat{MO'N'} = \widehat{ECC'} + \widehat{CC'E} = 1d,$$

et

$$\widehat{OMN} + \widehat{O'MN'} = \widehat{OMO'} = 1d.$$

Enfin, si du point M on abaisse, par exemple, des perpendiculaires MD′, ME′ sur les côtés C′B′, C′A′, les triangles MD′C′, ME′C′ seront semblables aux triangles CDC′, CEC′; donc les triangles D′C′E′, DC′E sont semblables et la droite D′E′ est parallèle à *d*.

Par un raisonnement analogue, on prouve que la droite de Simson, par rapport au triangle ABC, est aussi parallèle à ED.

Question 1584.

(1888, p. [illegible])

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *des nombres qui tendent, en décroissant, vers zéro, et* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *des nombres positifs, qui croissent toujours. Démontrer que, si la série*

$$a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \ldots$$

est divergente, il en est de même de la série

$$(a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \ldots.$$

(E. Cesàro).

SOLUTION

Par M. A. Buhl.

Je vais démontrer que les deux séries

$$(1) \qquad a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \ldots.$$

$$(2) \qquad (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \ldots$$

sont divergentes en même temps; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ étant des nombres décroissant indéfiniment; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ étant des nombres positifs croissant indéfiniment; je pose

$$b_1 = \frac{m_1}{a_1}, \qquad b_2 = \frac{m_2}{a_2}, \qquad b_3 = \frac{m_3}{a_3}, \qquad \ldots,$$

$m_1, m_2, m_3, \ldots$ étant des constantes convenablement choisies.

La série (1) devient alors

$$(3) \quad m_1 + m_2 - \frac{a_2}{a_1} m_1 + m_3 - \frac{a_3}{a_2} m_2 + m_4 - \frac{a_4}{a_3} m_3 + \ldots.$$

Cette série est supposée divergente; si nous lui enlevons tous les termes négatifs, il restera la série

$$(4) \qquad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots,$$

divergente à plus forte raison.

Changeons maintenant l'ordre des termes de la série (3), de façon à l'écrire

$$(5) \quad \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) m_1 + \left(1 - \frac{a_3}{a_2}\right) m_2 + \left(1 - \frac{a_4}{a_3}\right) m_3 + \ldots.$$

D'après les hypothèses, les coefficients des termes de cette série sont tous *positifs et finis*.

Donc la série (5) peut être considérée comme formée par la série (4) dont les termes auraient été multipliés par des nombres différents mais finis.

(4) étant divergente, (5) l'est alors aussi. Or la série (5) n'est autre chose que la série (2). On s'en apercevra en remplaçant m_1, m_2, ... par $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... La démonstration est donc faite.

SOLUTION

Par M. J. Franel.

Désignons par S_n et Σ_n les sommes des n premiers termes dans les séries respectives

$$(1) \qquad a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \ldots,$$

$$(2) \qquad (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)b_2 + (a_3 - a_4)b_3 + \ldots;$$

on aura

$$(3) \qquad \Sigma_n = S_n - a_{n+1} b_n = S_n - a_n b_n + b_n(a_n - a_{n+1}).$$

Si le produit $a_n b_n$ reste, pour toute valeur de n, inférieur à un nombre fixe A, la somme Σ_n, qui est $> S_n - a_n b_n$, augmentera indéfiniment avec n, puisque la série à termes positifs (1) est, par hypothèse, divergente, et le théorème est démontré.

Supposons maintenant que, quelque grand que soit A, il existe toujours une infinité de nombres n tels que $a_n b_n$ soit $>$ A. On a

$$\begin{aligned}\Sigma_{n+p} - \Sigma_n &= (a_{n+1} - a_{n+2})b_{n+1} + \ldots + (a_{n+p} - a_{n+p+1})b_{n+p} \\ &> b_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} - a_{n+p+1}),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \Sigma_{n+p} - \Sigma_n > b_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+p+1}).$$

Laissant n fixe, supposons que p devienne de plus en plus grand, a_{n+p+1} tendra vers o. On pourra donc, après avoir choisi une quantité positive ε quelconque, assigner un nombre P tel que, p étant $>$ P, $b_{n+1} a_{n+p+1}$ soit $< \varepsilon$. On aura donc, pour toutes les valeurs de $p >$ P,

$$(5) \qquad \Sigma_{n+p} > \Sigma_n + b_{n+1} a_{n+1} - \varepsilon.$$

Après avoir choisi un nombre A aussi grand qu'on le veut, on pourra, par hypothèse, déterminer n, de manière que $b_{n+1}a_{n+1}$ soit $> A$; ce nombre n étant fixé, on pourra ensuite assigner un nombre P tel que l'inégalité (5) soit satisfaite pour $p > P$. On voit donc que Σ_{n+p} finit par surpasser tout nombre donné d'avance, si grand qu'il soit. La série (2) est donc bien divergente. C. Q. F. D.

NOTA. — Les deux solutions qui précèdent ont paru dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (p. 218-219; 1896).

QUESTIONS.

1801. Si l'on prend sur les perpendiculaires communes aux arêtes opposées d'un tétraèdre des vecteurs dont les longueurs soient inversement proportionnelles aux longueurs de ces perpendiculaires, le vecteur résultant est perpendiculaire à l'une ou l'autre des faces du tétraèdre selon le sens dans lequel on dirige les vecteurs. (G. FONTENÉ.)

1802. En représentant par r_1, r_2, r_3 les rayons de courbure, aux points A, B, C de l'ellipse de Steiner du triangle ABC et par ω l'angle de Brocard de ce triangle, on a la relation

$$\sum \frac{r_1}{a} = \cot \omega.$$

(A. DROZ-FARNY.)

√ 1803. Une conique est donnée. On prend les normales à cette courbe issues de l'un de ses points. Pour chaque normale, on mène de son pied la droite qui lui est symétrique par rapport aux axes de la conique. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues passent par un même point.

(MANNHEIM.)

1804. Soit M un point variable situé sur une ellipse de foyers F et F'. La parabole qui est tangente à MF et MF' en F et F' a même axe et même foyer que la parabole osculatrice à l'ellipse en M. (E.-N. BARISIEN.)

[B4f]

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INVARIANT ABSOLU ET DES COVARIANTS D'UNE FORME BIQUADRATIQUE;

Par M. LACOUR,
Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

1. Étant donnée une équation du quatrième degré

$$U = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

nous ferons correspondre aux racines x_1, x_2, x_3, x_4 de cette équation les quatre points de la conique

$$(\Sigma_1) \qquad X = x^2, \qquad Y = 2x,$$

qui sont donnés par les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 du paramètre x : nous appellerons ces points *points fondamentaux* (¹).

On obtient facilement, par un calcul d'identification, l'équation générale des coniques qui rencontrent la conique (Σ_1) aux quatre points fondamentaux. Cette équation est

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0,$$

en posant

$$\Sigma = a_0 X^2 + 2 a_1 XY + a_2 Y^2 + 2 a_2 X + 2 a_3 Y + a_4,$$
$$\Sigma_1 = Y^2 - 4ZX,$$

et en désignant par λ une constante arbitraire : quand on remplace X par x^2 et Y par $2x$, Σ_1 devient nul et Σ devient identiquement égal à U.

2. *La décomposition du polynome du quatrième*

(¹) *Voir* Salmon, *Algèbre supérieure*, 2e édition française, p. 286. Paris, Gauthier-Villars.

degré U *en un produit de deux facteurs du second degré se ramène à la recherche des sécantes communes à toutes les coniques du faisceau*

$$\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0.$$

En effet, soit λ_1 une valeur de λ correspondant à un système de sécantes communes, on aura une identité de la forme

$$\Sigma - \lambda\Sigma_1 = (\alpha X + \beta Y + \gamma)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma'),$$

et si, dans les deux membres de cette identité, on fait

$$X = x^2, \qquad Y = 2x,$$

il vient

$$U = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma').$$

Réciproquement, supposons que l'on ait l'identité

$$U = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)(\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma'),$$

la conique

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma')$$

est une de celles qui coupent (Σ_1) aux quatre points fondamentaux; elle peut donc être représentée par une équation de la forme $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ et, comme elle se décompose en deux droites, elle donne un système de sécantes communes à (Σ_1) et à (Σ).

3. Les sécantes communes aux coniques du faisceau

$$\begin{aligned}\Sigma - \lambda\Sigma_1 = a_0 X^4 + 2a_1 XY + (a_2 - \lambda)Y^2 \\ + 2(a_2 + 2\lambda)X + 2a_3 Y + a_4\end{aligned}$$

se déterminent à l'aide de l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 + 2\lambda \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 \\ a_2 + 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, qui se nomme *équation canonisante*,

peut s'écrire

$$4\lambda^3 - S\lambda + T = 0,$$

en posant

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \qquad T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Dès que l'on connaît une racine de cette équation, la résolution de l'équation du quatrième degré ne dépend plus que d'équations du second degré.

4. La conique désignée ici par (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), puisque l'équation en λ qui détermine les sécantes communes aux coniques du faisceau

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0$$

manque de terme en λ^2.

Le discriminant de Σ est égal à T ; dans le cas particulier où $T = 0$, (Σ) se décompose en deux droites et, comme (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), les deux droites sont conjuguées par rapport à la conique (Σ_1).

5. On peut conclure de là que, *quand* $T = 0$, *le polynome* U *est la somme des quatrièmes puissances de deux expressions linéaires.*

En effet, $\Sigma = 0$ représente alors deux droites conjuguées par rapport aux tangentes menées de leur point d'intersection à la conique (Σ_1) ; Σ peut donc se mettre sous la forme

$$\Sigma = P^2 - Q^2,$$

P et Q désignant les premiers membres des équations de deux tangentes à la conique (Σ). Dans l'identité précédente, faisons $X = x^2$, $Y = 2x$, Σ devient identique à U, P devient un carré parfait puisque la droite $P = 0$

rencontre la conique (Σ_1) en deux points confondus; il en est de même de Q. On est donc conduit à une identité de la forme

$$U = p^4 + q^4,$$

p et q désignant des expressions linéaires par rapport à x.

La réciproque se démontre en reprenant les mêmes raisonnements dans l'ordre inverse.

6. *Dans le cas où* $T = 0$, *le rapport anharmonique* (x_1, x_2, x_3, x_4) *des quatre racines de l'équation* $U = 0$, *prises dans un ordre convenable, est égal à* -1. Cela résulte de ce que (x_1, x_2, x_3, x_4) est le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites qui joignent l'origine aux points fondamentaux et que, dans le cas où T est égal à zéro, ces quatre points sont sur deux droites conjuguées par rapport à (Σ_1), savoir les deux sécantes communes représentées par l'équation $\Sigma = 0$.

7. Plus généralement, proposons-nous de calculer le rapport anharmonique $\rho = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en fonction des coefficients S et T de l'équation canonisante.

ρ est le rapport anharmonique des quatre droites joignant un point quelconque de (Σ_1) aux points fondamentaux M_1, M_2, M_3, M_4; si le point considéré de (Σ_1) est M_4, les quatre droites sont

$$M_4M_1, \quad M_4M_2, \quad M_4M_3, \quad M_4M_4.$$

Ce sont les tangentes aux coniques du faisceau $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ qui correspondent aux valeurs suivantes de λ

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty.$$

Ces tangentes ont des équations de la forme

$$T - \lambda T_1 = 0,$$

pour

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty.$$

Donc, leur rapport anharmonique

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \infty) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

La question est ramenée à former la transformée de l'équation

$$4\lambda^3 - S\lambda + T = 0,$$

la transformation étant définie par la formule

$$\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Pour cela, nous poserons

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 3A, \qquad \lambda_3 - \lambda_1 = 3B, \qquad \lambda_1 - \lambda_2 = 3C,$$

de sorte que l'on aura

$$A + B + C = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = -\frac{B}{A}.$$

Mais, en tenant compte de la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

on obtient facilement

$$\lambda_1 = C - B, \qquad \lambda_2 = A - C, \qquad \lambda_3 = B - A.$$

D'après cela, S et T sont des fonctions homogènes de A, B, C respectivement du deuxième degré et du troisième degré; en remplaçant C par $-(A + B)$, S et T deviennent des fonctions homogènes de A et B de degrés 2 et 3; par conséquent $\frac{S^3}{T^2}$ ne dépend que du rapport $\frac{B}{A}$ et, comme l'inconnue ρ est égale à $-\frac{B}{A}$, $\frac{S^3}{T^2}$ s'exprime en fonction de ρ : si l'on calcule cette expression, on aura l'équation qui détermine ρ quand S et T sont donnés.

Un calcul qui ne présente aucune difficulté donne

$$\frac{1}{3.4}\,S = \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 + C^2) = A^2 - AB + B^2,$$

$$\frac{1}{4}\,T = (B - C)(C - A)(A - B) = (2B - A)(2A + B)(B - A),$$

et l'on en conclut

$$\frac{1}{4.27}\,\frac{S^3}{T^2} = \frac{(1 - \rho + \rho^2)^3}{[(2\rho - 1)(\rho - 2)(\rho + 1)]^2}.$$

Telle est *la relation qui existe entre l'invariant absolu* $\frac{S^3}{T^2}$ *de la forme biquadratique* U *et le rapport anharmonique* $\rho = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *des quatre racines de l'équation* $U = 0$.

8. La condition pour que les coniques (Σ) et (Σ_1) soient tangentes, c'est-à-dire pour que l'équation aux x des points d'intersection ait une racine double, est que l'équation du troisième degré en λ

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0$$

ait elle-même une racine double.

D'après cela, *le discriminant de l'équation donnée ne doit différer que par un facteur numérique de celui de l'équation en* λ, *c'est-à-dire de*

$$S^3 - 27T^2.$$

D'une manière générale, la discussion de l'équation du quatrième degré $U = 0$ et celle de l'équation du troisième degré en λ peuvent se ramener l'une à l'autre. Nous nous limiterons ici au cas où l'équation $U = 0$ a ses quatre racines distinctes en supposant dans ce qui suit que $S^3 - 27T^2$ est différent de zéro.

9. Le hessien

$$H = (a_0x^2 + 2a_1x + a_2)(a_2x^2 + 2a_3x + a_4) \\ - (a_1x^2 + 2a_2x + a_3)^2$$

est représenté sur (Σ_1) par les points où (Σ_1) est rencontrée par la conique

$$(a_0X + a_1Y + a_2)(a_2X + a_3Y + a_4) \\ - (a_1X + a_2Y + a_3)^2 = 0.$$

Or, cette conique est l'enveloppe de la droite

$$x^2(a_0X + a_1Y + a_2) + 2x(a_1X + a_2Y + a_3) \\ + (a_2X + a_3Y + a_4) = 0.$$

et cette droite est la polaire, par rapport à (Σ), d'un point de (Σ_1), celui dont les coordonnées sont x^2, $2x$, 1. La conique sécante est donc la polaire réciproque de (Σ_1) par rapport à (Σ).

Mais puisque (Σ) est harmoniquement circonscrite à (Σ_1), la polaire réciproque de (Σ_1) par rapport à (Σ) et la polaire réciproque de (Σ) par rapport à (Σ_1) rencontrent aux mêmes points la conique (Σ_1) [1].

D'autre part, les points où (Σ_1) est rencontrée par la polaire réciproque de (Σ) par rapport à (Σ_1) sont les points de contact des tangentes communes à (Σ_1) et à (Σ).

Donc *le hessien est représenté sur* (Σ_1) *par les points de contact des tangentes communes à* (Σ_1) *et à* (Σ).

Vérifions ce résultat par le calcul. La tangente à (Σ_1) au point dont les coordonnées sont x^2, $2x$ et 1 a pour équation

$$X - 2xY + x^2Z = 0.$$

En écrivant que cette droite est tangente à (Σ), on

---

[1] On le voit aisément en rapportant (Σ) et (Σ_1) à leur triangle conjugué commun.

obtient, pour déterminer le paramètre x du point de contact, l'équation

$$\mathrm{H} \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -x \\ a_2 & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le premier membre, on trouve bien le hessien comme il fallait le vérifier.

10. Proposons-nous maintenant de déterminer, sur (Σ_1), les points de contact des tangentes communes à (Σ_1) et à une conique du faisceau

$$\Sigma - \lambda \Sigma_1 = 0.$$

Il suffit pour cela d'écrire que les coordonnées de la droite

$$X - 2xY + x^2 Z = 0$$

satisfont à l'équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 + 2\lambda & u \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 & v \\ a_2 + 2\lambda & a_3 & a_4 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe le déterminant et si l'on ordonne par rapport à λ, on met l'équation tangentielle sous la forme

$$\sigma(u, v, w) - \lambda \Phi(u, v, w) - \lambda^2 \sigma_1(u, v, w) = 0,$$

qui met en évidence les premiers membres des équations tangentielles de trois coniques, savoir (Σ), (Σ_1) et la conique enveloppe des droites divisées harmoniquement par (Σ) et (Σ_1).

Remplaçons dans cette équation tangentielle u, v, w par les coordonnées de la tangente considérée de (Σ_1) :

$\sigma_1(u, v, w)$ devient égal à o, $\sigma(u, v, w)$ à H comme on l'a vu dans le paragraphe précédent; enfin $\Phi(u, v, w)$ devient égal à U, résultat qui s'explique en remarquant qu'une tangente à (Σ_1) en l'un des points communs à (Σ_1) et à (Σ) est divisée harmoniquement par ces deux coniques.

L'équation qui détermine les x des points de contact est donc

$$\mathrm{H} - \lambda \mathrm{U} = 0.$$

Donc *une des formes de l'involution définie par l'équation*

$$\mathrm{H} - \lambda \mathrm{U} = 0$$

est représentée sur (Σ_1) *par les points de contact des tangentes communes à* (Σ_1) *et à la conique* $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$.

De plus, on a été conduit à l'identité

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda & a_3 & -x \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{H} - \lambda \mathrm{U}.$$

11. En considérant en particulier les coniques évanouissantes du faisceau $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$, on obtient trois identités très importantes dans l'étude d'une forme biquadratique.

Quand la conique $\Sigma - \lambda\Sigma_1 = 0$ se réduit à un système de deux droites, les tangentes communes à cette conique et à (Σ_1) deviennent les tangentes à (Σ_1) menées par le point double du système de deux droites. Les quatre points de contact viennent se confondre deux à deux en des points situés sur la polaire du point double. L'équation aux x de ces points de contact doit admettre deux racines doubles, et l'on voit ainsi que $\mathrm{H} - \lambda \mathrm{U}$ *devient un carré parfait, quand on y remplace* λ *par*

une racine de l'équation

$$4\lambda^3 - S\lambda - T = 0.$$

Il est facile de le vérifier par le calcul. Partons de l'identité

$$\begin{vmatrix} 2\alpha\alpha' & \alpha\beta' + \beta\alpha' & \alpha\gamma' + \gamma\alpha' & u \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' & 2\beta\beta' & \beta\gamma' + \gamma\beta' & v \\ \alpha\gamma' + \gamma\alpha' & \beta\gamma' + \gamma\beta' & 2\gamma\gamma' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u & v & w \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2,$$

qui donne deux expressions équivalentes pour le premier membre de l'équation tangentielle de la conique $(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$. Dans cette identité, remplaçons les coefficients de l'équation ponctuelle de la conique évanouissante par leurs valeurs obtenues § 2, puis u, v, w par 1, $-x$, $2x^2$, il vient

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda_1 & 1 \\ a_1 & a_2 - \lambda_1 & a_3 & -x \\ a_2 - 2\lambda_1 & a_3 & a_4 & x^2 \\ 1 & -x & x_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2,$$

ou, en désignant par φ le déterminant élevé au carré dans le second membre,

$$H - \lambda_1 U = -\varphi^2.$$

L'équation $\varphi = 0$ détermine les x des points de rencontre de (Σ_1) avec la polaire du point double de $\Sigma - \lambda_1 \Sigma_1 = 0$, c'est-à-dire avec le côté du triangle conjugué commun à (Σ) et à (Σ_1) qui correspond à la racine λ_1.

En répétant les mêmes raisonnements pour les autres racines, on obtient les identités cherchées

$$H - \lambda_1 U = -\varphi^2, \qquad H - \lambda_2 U = -\psi^2, \qquad H - \lambda_3 U = -\chi^2;$$

φ, ψ et χ sont représentés sur (Σ_1) par les couples de

points situés sur les trois côtés du triangle conjugué commun à (Σ_1) et à (Σ).

Un côté de ce triangle est conjugué de chacune des sécantes communes qui passent par le sommet opposé du triangle ; de plus, il est conjugué de chacun des deux autres côtés du triangle. Les principales propriétés des formes φ, ψ, χ peuvent se déduire de là.

12. Pour terminer, nous chercherons à représenter sur (Σ_1) le covariant du sixième degré

$$J = \begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ H'_x & H'_y \end{vmatrix}.$$

On voit aisément, en se reportant aux trois identités obtenues dans le paragraphe précédent, que chacune des racines de φ, ψ ou χ est racine de J. On a donc, en désignant par m un facteur constant,

$$J = m\varphi\psi\chi.$$

J est représenté sur (Σ_1) par les trois couples de points situés sur les trois côtés du triangle conjugué commun à (Σ_1) et à (Σ).

[P1b]

SUR UNE CERTAINE FAMILLE DE COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. H.-E. TIMERDING.

1. Étant donnés sur une droite trois points fixes A, B, N et un point variable P, nous cherchons un autre point Q de la droite tel que le rapport anharmonique que Q et P forment avec A et B soit égal à celui que P et N forment avec A et B. Cherchons ensuite le point R

tel que le rapport anharmonique de R et Q avec A et B soit égal à celui de Q et P avec A et B, et continuons ainsi. Nous parviendrons de cette manière à une série de points P, Q, R, . . . que nous appelons *points-puissances* du premier d'entre eux par rapport aux points fixes A, B, N. Le point qui est dans cette série à la $n^{\text{ième}}$ place sera le $n^{\text{ième}}$ point-puissance de P, et n sera son exposant.

Soit α le rapport anharmonique des quatre premiers points P, N ; A, B. Nous aurons, selon l'hypothèse,

$$\frac{QA}{QB} : \frac{NA}{NB} = \left(\frac{QA}{QB} : \frac{PA}{PB}\right)\left(\frac{PA}{PB} : \frac{NA}{NB}\right) = \alpha^2,$$

et, de la même manière,

$$\frac{RA}{RB} : \frac{NA}{NB} = \alpha^3, \quad \dots .$$

Les rapports anharmoniques que les points-puissances P, Q, R, . . . forment avec les points fixes N, A, B s'expriment donc par les puissances du rapport anharmonique du premier point P avec les mêmes points fixes. C'est ainsi que la désignation de ces points est justifiée.

Pour étendre cette définition des puissances géométriques aux points d'un plan, nous prenons arbitrairement dans ce plan quatre points A, B, C, O. Les trois premiers forment le triangle de référence Δ, le quatrième est considéré comme le *point-unité*.

Nous joignons ce dernier aux points A, B, C par des lignes droites qui coupent les côtés opposés du triangle Δ respectivement en L, M, N. Faisons de même pour un point quelconque P, et soient les points alors correspondants à L, M, N désignés par P', P'', P'''. Si nous cherchons les points-puissances de ces derniers points

sur les côtés du triangle Δ de la manière que nous venons d'exposer, en remplaçant les points fondamentaux A, B, N une fois par C, A, M et une fois par B, C, L les lignes qui joignent trois points-puissances correspondant aux sommets opposés du triangle Δ se couperont en un seul et même point, et ce point sera le n ième point-puissance du point P par rapport au triangle Δ et au point-unité O.

Une série de points-puissances passe dans une série de la même nature, si nous transformons le plan par une homographie quelconque, pourvu que les points de référence soient remplacés par leurs points transformés respectifs. Pour cette raison, nous pouvons nommer les points-puissances puissances homographiques du point qui est leur base.

2. A un point proposé appartient un seul point qui en est la $n$ième puissance, mais *vice versa* il correspond au dernier point un groupe de n^2 points dont il est la $n$ième puissance.

Ce groupe des $n$ièmes *points-racines* est transformé en lui-même par un groupe de n^2 homographies, y compris l'identité, de telle sorte que par ces n^2 transformations d'un point quelconque du groupe on déduit tous les n^2 points qui forment le groupe.

Le groupe des points représente, pour ainsi dire, le groupe des transformations. Ces dernières s'expriment analytiquement en multipliant les coordonnées rapportées au triangle Δ par des $n$ièmes racines de l'unité. Elles sont donc les mêmes pour tous les groupes de n^2 points-racines se rapportant au triangle Δ.

Les n^2 points-racines d'un groupe sont situés sur trois faisceaux de n droites dont chacune en contient n déterminés par une équation binome. Ces faisceaux

ont pour sommets les sommets du triangle Δ et passent en eux-mêmes par les n^2 transformations du groupe.

A deux nombres quelconques n_1 et n_2 dont le produit est n correspondent deux manières de décomposer le groupe des n^2 points en groupes partiels. Nous appelons ces deux décompositions *conjuguées* pour la raison suivante. Chacun des groupes partiels se compose ou de n_1^2 ou de n_2^2 points. Les groupes de n_1^2 points passent l'un dans l'autre par le groupe de n_2^2 transformations homographiques qui correspondent aux groupes de n_2^2 points (considérés comme des $n_2^{\text{ièmes}}$ points-racines) et l'on obtient les groupes de n_2^2 points eux-mêmes en transformant un groupe quelconque de n_1^2 points par les n_2^2 homographies.

Deux points du groupe des n^2 points-racines appartiennent à un même groupe partiel ou non. Dans ce dernier cas ils définissent une homographie que nous dirons *primitive*. L'homographie est ainsi définie que par elle l'un des deux points passe dans l'autre, tandis que le triangle Δ reste invariable. Deux homographies primitives seront indépendantes si l'on ne parvient pas à l'une par une répétition de l'autre. On a alors le théorème que, si l'on choisit deux homographies du groupe qui sont primitives et indépendantes, on peut composer chaque homographie du groupe par ces deux, réitérées chacune un nombre convenable de fois.

Imaginons maintenant deux groupes de points-racines, l'un de p^2, l'autre de q^2 points. Si nous transformons l'un d'eux par toutes les homographies qui correspondent à l'autre, nous parvenons à un certain troisième groupe qui est composé des deux premiers, et ce troisième groupe consiste en $\left(\frac{pq}{r}\right)^2$ points, si r est le plus grand diviseur commun des nombres p et q. Ces

remarques suffiront pour donner une idée nette des groupes de points et des groupes d'homographies en question.

3. Nous pouvons concevoir une relation géométrique entre les points du plan telle qu'à un point correspond sa $n^{\text{ième}}$ puissance homographique.

Nous représentons analytiquement cette *affinité* en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance les coordonnées d'un point rapportées au triangle Δ et ainsi choisies que les coordonnées du point-unité O soient toutes égales entre elles. Aux n^2 points-racines d'un groupe correspond, dans cette affinité, le même point. A une droite quelconque sera conjuguée une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre que nous dirons la $n^{\text{ième}}$ puissance de la droite et dont l'équation dans les coordonnées mentionnées est de la forme suivante :

$$\Sigma a_i x_i^n = 0,$$

si nous désignons, comme nous le ferons toujours, par le signe Σ, la sommation par rapport aux indices 1, 2, 3. Ces *courbes-puissances* ont deux propriétés caractéristiques :

D'abord *elles sont transformées en elles-mêmes par le groupe de n^2 homographies que nous avons considéré dans l'article précédent.*

Ensuite *leur Hessienne se décompose en trois droites, les côtés du triangle Δ comptés $(n-2)$ fois.*

Les courbes elles-mêmes peuvent se décomposer en un faisceau de n droites ; alors un des coefficients a sera nul. Mais, si cela n'arrive pas, elles sont toujours privées de points singuliers et du genre riemannien $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

En égalant à zéro un des coefficients a nous voyons

que, par chaque sommet du triangle Δ, il passe un faisceau de n droites dont chacune est une tangente complète de la courbe, c'est-à-dire une droite dont tous les points d'intersection avec la courbe se réunissent en un seul. Ces $3n$ tangentes singulières remplacent les $3n(n-2)$ tangentes stationnaires qu'on devrait avoir suivant les formules de Plucker et, en même temps, les tangentes doubles.

4. Notons encore les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toutes les courbes-puissances d'ordre égal et rapportées au même triangle fondamental Δ proviennent d'une d'entre elles par les transformations homographiques qui laissent invariable le triangle Δ.*

Théorème II. — *Les polaires d'un point par rapport à une courbe-puissance sont encore des courbes-puissances.*

On obtient donc toutes les courbes-puissances d'ordre p, qui se rapportent à un certain triangle Δ, en cherchant les $q^{\text{ièmes}}$ polaires de tous les points du plan par rapport à une courbe-puissance quelconque de l'ordre $p+q$, ayant le même triangle fondamental Δ. Et réciproquement nous pouvons dire :

Chaque courbe-puissance d'ordre p peut être regardée comme la $q^{\text{ième}}$ polaire d'un point arbitraire P par rapport à une courbe-puissance d'ordre $p+q$, se rapportant au même triangle fondamental qui est ainsi complètement définie.

Car soient y_i les coordonnées du point P, si nous écrivons alors l'équation de la première courbe

$$\Sigma a_i x_i^p = 0.$$

comme il suit :

$$\sum \frac{a_i}{y_i^q} y_i^q x_i^p = 0,$$

on voit que l'équation de la seconde courbe est

$$\sum \frac{a_i}{y_i^q} x_i^{p+q} = 0.$$

5. Pour étendre la notion des puissances d'une droite à des exposants négatifs, remarquons qu'on obtient la courbe

$$\Sigma a_i x_i^{-n} = 0$$

de la courbe

$$\Sigma a_i x_i^n = 0$$

en remplaçant les coordonnées par leurs valeurs réciproques. Mais cette opération équivaut à une transformation quadratique ordinaire pour le triangle fondamental Δ, qui laisse invariable le point-unité O. Il s'ensuit, puisque les courbes-puissances à exposant positif ne passent par aucun sommet du triangle Δ, que la courbe-puissance à l'exposant $-n$ est de l'ordre $2n$ et qu'elle a un point n^{tuple} dans chaque sommet du triangle Δ. Elle doit être du même genre que la courbe à l'exposant n et, en effet, on a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} - 3\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

De la même manière qu'on passe des puissances aux racines, cherchons maintenant la courbe dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est une droite proposée. La forme de son équation est aussitôt trouvée, la voici

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Mais quel est son ordre et quels sont ses points singuliers?

Remarquons d'abord que *vice versa* la droite n'est pas complètement déterminée par la courbe dont elle est la $n^{\text{ième}}$ puissance. En effet, à la même *courbe-racine* correspondent n^2 droites que nous obtenons d'une d'entre elles par le groupe de n^2 homographies considéré dans l'article 2. Car on ne change pas la courbe-racine, si l'on multiplie ses coefficients par des $n^{\text{ièmes}}$ racines quelconques de l'unité.

Par conséquent, l'ordre de notre courbe doit être n puisque sa $n^{\text{ième}}$ puissance a l'ordre n^2.

Quant à ses points singuliers, ils correspondent aux points d'intersection des n^2 droites conjuguées à la courbe-racine. Parmi ces points d'intersection il y en a n sur chaque côté du triangle Δ, par chacun desquels passent n des n^2 droites. Ces derniers points ne nous donnent pas de points singuliers de la courbe-racine, mais les côtés du triangle Δ sont des tangentes singulières de la courbe ayant de commun avec elle n points coïncidents. Le reste de l'intersection se compose de

$$\frac{n^2(n^2-1)}{2} - 3\,\frac{n^2(n-1)}{2} = n^2\,\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points auxquels correspondent les points doubles de la courbe-racine, et un point double est conjugué à n^2 points d'intersection, car nous trouvons pour la courbe-racine

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles, comme cela doit être, puisqu'elle est de l'ordre n et du genre 0.

6. Nous sommes maintenant en état de discuter les courbes-puissances générales, c'est-à-dire les courbes

dont l'équation a la forme

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{m}{n}} = 0,$$

où m et n sont des nombres entiers et positifs, que nous devons supposer privés de diviseur commun.

Cette courbe est la $n^{\text{ième}}$ courbe-racine d'une courbe-puissance à exposant entier et de l'ordre m. Elle est rapportée à cette dernière courbe, point par point, sans ambiguïté; donc elle est du même genre riemannien

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Nous trouvons ensuite que *la courbe est de l'ordre* $m.n$, puisqu'elle est la $m^{\text{ième}}$ puissance de la courbe

$$\Sigma a_i x_i^{\frac{1}{n}} = 0,$$

qui a l'ordre n.

La courbe doit avoir, de plus,

$$\frac{m^2(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles et m points singuliers sur chaque côté du triangle Δ, dont chacun équivaut à $n-1$ points simples et $\frac{1}{2}(n-1)(m-3)$ points doubles ordinaires. En effet, nous trouvons ainsi pour le genre de la courbe

$$\frac{(mn-1)(mn-2)}{2} - \frac{m^2(n-1)(n-2)}{2} - \frac{3m(m-1)(n-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

comme il est juste.

7. Pour évaluer la classe de notre courbe, remarquons qu'une quelconque de ses tangentes a des coordonnées de la forme

$$u_i = a_i x_i^{\frac{m-n}{n}},$$

si les x_i sont les coordonnées du point de contact. On peut tirer les dernières *vice versa* des égalités précédentes, en supposant connues les u_i et l'on trouve

$$x_i = b_i u_i^{\frac{n}{m-n}}, \quad \text{où} \quad b_i = a_i^{\frac{n}{m-n}}.$$

En substituant ces expressions dans l'équation de notre courbe, nous obtenons son équation tangentielle

$$\Sigma b_i u_i^{\frac{m}{m-n}} = 0.$$

Cette équation est de la même forme que l'équation proposée, excepté la signification des variables qui déterminent dans l'équation précédente des droites et non pas des points. Mais les formules trouvées plus haut, pour l'ordre et les points singuliers, ne cessent pas de valoir, si l'on remplace l'ordre par la classe et les points singuliers par les tangentes singulières de la courbe donnée par son équation tangentielle.

Nous trouvons ainsi que *notre courbe est de la classe* $m(m-n)$.

En laissant au lecteur la détermination des tangentes singulières, nous nous bornons à énoncer le théorème suivant, que nous avons trouvé en même temps :

Théorème III. — *La courbe réciproque d'une courbe-puissance à l'exposant p est une autre courbe-puissance dont l'exposant est* $\frac{p}{p-1}$. On parvient à la courbe réciproque en cherchant l'enveloppe des polaires de la courbe proposée par rapport à une conique qui est conjuguée à elle-même par rapport au triangle Δ.

8. Pour généraliser ce théorème remarquons qu'en formant les mêmes expressions qui donnent les coordonnées d'une tangente, si les valeurs x_i se rapportent

à un point de la courbe, pour un point quelconque du plan, on obtient les coordonnées de la dernière polaire de ce point par rapport à la courbe proposée. Imaginons alors que le point parcoure une courbe-puissance au même triangle fondamental que la première, nous aurons le théorème suivant :

Théorème IV. — *Étant proposées deux courbes-puissances se rapportant au même triangle fondamental, les dernières polaires des points de l'une, qui soit de l'ordre p, par rapport à l'autre, dont l'ordre soit q, enveloppent une troisième courbe-puissance au même triangle fondamental, dont la classe sera* $\frac{p}{q-1}$ *et dont l'ordre sera, par conséquent,* $\frac{p}{p-q+1}$.

Ajoutons à ce théorème le suivant :

Théorème V. — *Si nous cherchons les* $r^{\text{ièmes}}$ *polaires d'un point, auquel nous faisons parcourir une courbe-puissance de l'ordre p, par rapport à deux courbes-puissances d'ordre égal et ayant le même triangle fondamental que la première ces polaires se couperont dans un groupe de* $(s-r)^2$ *points qui engendrent une nouvelle courbe-puissance de l'ordre* $\frac{p(r-s)}{r}$, *tandis que le premier point parcourt la courbe d'ordre p.*

Deux courbes-puissances $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ d'ordre égal déterminent un faisceau de courbes

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Les polaires d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau forment un autre faisceau. Nous dirons les points communs des courbes de ce dernier faisceau les points conjugués au

point proposé par rapport au premier faisceau. En nous servant de cette désignation nous pouvons, comme corollaire du théorème précédent, énoncer le suivant :

Théorème VI. — *Les points conjugués aux points d'une droite par rapport à un faisceau de courbes-puissances (ayant le même triangle fondamental) forment une autre courbe-puissance de l'ordre* $\frac{r-s}{r}$.

Ces théorèmes peuvent servir à dériver des courbes-puissances à exposant entier les courbes-puissances à exposant fractionnaire.

9. Imaginons encore qu'il existe une relation entre les coefficients u_i dans l'équation

$$\Sigma u_i x_i^p = 0$$

d'une courbe-puissance et que cette relation soit elle-même de la forme

$$\Sigma \alpha_i u_i^q = 0,$$

alors les courbes définies par ces deux équations forment *un faisceau de l'ordre* q. Elles sont les $p^{\text{ièmes}}$ puissances des tangentes d'une courbe-puissance de la classe q.

Donc elles enveloppent elles-mêmes une courbe-puissance de l'ordre $\frac{pq}{q-1}$.

Si nous interprétons les u_i comme les coordonnées d'un point que nous nommerons *pôle* de la courbe-puissance, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Les courbes-puissances d'ordre p, dont les pôles forment une courbe-puissance d'ordre q, enveloppent une courbe-puissance d'ordre* $\frac{pq}{q-1}$.

Cette dernière courbe se rapporte avec les premières au même triangle fondamental. Deux mots encore sur les pôles que nous venons de définir. Le pôle d'une courbe-puissance est aussi le pôle des polaires du point unité par rapport à cette courbe, entre autres de la dernière polaire qui est une droite.

Si nous remplaçons le pôle d'une courbe-puissance par sa $n^{\text{ième}}$ puissance, la courbe conjuguée passera en une autre qui mérite d'être nommée la $n^{\text{ième}}$ puissance polaire de la courbe proposée et qui, si cette dernière a pour équation

$$\Sigma a_i x_i^p = 0,$$

est définie elle-même par l'équation

$$\Sigma a_i^n x_i^p = 0.$$

Pour parvenir d'une droite à ses différentes puissances polaires, transformons-la par l'homographie qui, laissant invariable le triangle fondamental, remplace le point unité par le pôle de la droite. Cette transformation s'exprime analytiquement, si

$$\Sigma a_i x_i = 0$$

est l'équation de la droite, par la substitution de $a_i x_i$ au lieu de x_j. En la répétant, nous aurons les puissances consécutives de la droite proposée.

Le même procédé ne suffit pas au cas général d'une courbe-puissance d'ordre p; au contraire, il ne fournira que les puissances polaires correspondantes à une valeur

$$n = rp + 1,$$

r désignant un nombre entier et positif quelconque. Pour avoir toutes les puissances polaires, il faut employer une transformation qui est une $p^{\text{ième}}$ racine de la transformation mentionnée, c'est-à-dire qui la donne

après avoir été répétée p fois et non un nombre moindre de fois.

Au cas particulier d'une conique

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0,$$

on peut parvenir à toutes les puissances polaires en se servant encore de la conique

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

qui a pour pôle le point-unité. En effet, cette conique passe par la transformation

$$x'_i = a_i x_i$$

dans la courbe

$$\Sigma a_i^2 x'^2_i = 0,$$

tandis que la première conique est transformée en celle-ci

$$\Sigma a_i^3 x'^2_i = 0.$$

Mais on peut aussi dériver des deux coniques que nous considérons comme proposées une série d'autres coniques, en cherchant de l'une d'elles la conique réciproque, c'est-à-dire l'enveloppe des polaires de ses points, par rapport à l'autre, et encore les courbes réciproques des deux coniques proposées par rapport à la conique que nous venons de construire et ainsi de suite. On voit aisément que l'on parvient de cette manière à toutes les coniques dont l'équation est de la forme suivante

$$\Sigma a_i^n x_i^2 = 0,$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Pour compléter ces remarques, ajoutons-y le théorème suivant, dont la généralisation à n dimensions est une des belles découvertes de Jacobi contenues dans son célèbre Mémoire sur les formes quadratiques.

Théorème. — *Chaque transformation linéaire qui satisfait à la condition*

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma x_i^2,$$

en désignant par y_i *les transformées des* x_i, *et qui fait passer une conique*

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

dans une autre

$$\sum_i a_i y_i^2 = 0.$$

transforme en même temps les coniques qu'on obtient de la proposée en mettant dans son équation $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *à la place de* x_i, *et en répétant cette substitution un nombre quelconque r de fois, transforme, disons-nous, ces coniques dans les autres*

$$\sum_i a_i^{2r+1} y_i^2 = 0.$$

et de même les coniques qu'on obtient de celle-ci

$$\Sigma x_i^2 = 0$$

par la même opération, dans les courbes

$$\sum_i a_i^{2r} y_i^2 = 0.$$

10. Pour finir, citons les cas les plus simples des courbes traitées ci-dessus.

1° Si nous supposons que dans l'équation

$$\Sigma a_i x_i^p = 0,$$

$p = 2$, la courbe sera une conique conjuguée à elle-même par rapport au triangle fondamental Δ :

2° Si nous posons $p = -1$, nous parvenons à une conique circonscrite au triangle Δ;

3° Si nous posons $p = \frac{1}{2}$, nous aurons une conique inscrite au triangle Δ;

4° A $p = 3$ correspond la cubique qu'on appelle *cubique équianharmonique*, parce que quatre tangentes coupant la courbe au même point sont toujours en rapport équianharmonique. Des points d'inflexion de la courbe il y en a trois sur chaque côté du triangle Δ;

5° Si nous supposons $p = \frac{1}{3}$, nous aurons une cubique rationnelle, et l'équation d'une cubique rationnelle se peut mettre toujours sous cette forme, pourvu que ses trois tangentes stationnaires soient réelles, c'est-à-dire si son point double est ou isolé ou imaginaire. Les tangentes stationnaires sont les côtés du triangle Δ;

6° En posant $p = -2$, nous obtenons une courbe rationnelle du quatrième ordre, dont les trois points doubles sont réels et les sommets du triangle Δ;

7° Aussi à $p = -\frac{1}{2}$ il correspond une courbe rationnelle du quatrième ordre qui est la transformée quadratique d'une conique touchant les côtés du triangle Δ et la réciproque d'une cubique rationnelle. Cette courbe a trois points dans les sommets du triangle Δ. A. Cayley y est parvenu de la manière suivante :

Si nous joignons aux sommets respectivement opposés les points où les côtés du triangle Δ sont touchés par une conique inscrite à ce triangle, ces trois droites se couperont en un seul point qui sera conjugué à la conique par rapport au triangle Δ. Si x_i sont les coordonnées de ce point, la conique elle-même aura l'équation

$$\sum \sqrt{\frac{\xi_i}{x_i}} = 0.$$

En supposant que cette conique passe par un point fixe aux coordonnées α_i, nous trouvons que le point conjugué à la conique est située sur la courbe

$$\sum \sqrt{\frac{\alpha_i}{x_i}} = 0,$$

qui est de la forme cherchée.

8° Le cas $p = \frac{2}{3}$ nous donne une courbe intéressante qui est la généralisation homographique de la ligne formée par les centres de courbure d'une section conique. En appelant deux droites conjuguées par rapport à une conique, si elles sont divisées harmoniquement par les tangentes de la conique passant par leur point d'intersection, nous engendrons la courbe de la manière suivante : Menons par chaque point d'une conique la droite qui est conjuguée à la tangente de la conique en ce point par rapport à une autre conique, alors ces droites envelopperont la courbe en question. Cette dernière est du sixième ordre et de la quatrième classe ; elle a quatre points doubles ordinaires et encore six points situées deux à deux sur les côtés du triangle par rapport auquel les deux coniques sont conjuguées à elles-mêmes.

[F2a]

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE (1);

PAR M. E. IAGGI.

Dans les nombreuses études des fonctions elliptiques qui ont été faites depuis Abel et Jacobi jusqu'à ce

(1) Cette Note est un extrait, complété sur quelques points par l'auteur, des *Recherches sur la théorie des fonctions*, par E. IAGGY. Besançon, 1897. E. I.

jour, on considère comme types de ces fonctions les trois suivantes :

1° $\operatorname{sn} x$, qui a pour substitutions

$$4mK + 2niK' + x \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$2(2m - 1)K + 2niK' - x.$$

2° $\operatorname{cn} x$, qui a pour substitutions

$$4mK + 2n(K + iK') \pm x.$$

3° $\operatorname{dn} x$, dont les substitutions sont

$$2mK + 4niK' \pm x,$$

et l'on considère que $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, qui sont liées par la relation

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1,$$

sont respectivement les analogues des fonctions circulaires $\sin \frac{\pi}{2k} x$ et $\cos \frac{\pi}{2k} x$ dont les substitutions sont respectivement

$$4mK + x,$$
$$2(2m + 1)K - x,$$

et

$$4mK \pm x,$$

et qui sont liées par la relation

$$\sin^2 \frac{\pi}{2k} x + \cos^2 \frac{\pi}{2k} x = 1.$$

D'ailleurs, $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ donnent lieu à un théorème d'addition qui se ramène au théorème d'addition des fonctions circulaires lorsqu'on annule k.

Toutefois, l'analogie entre $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ et les fonctions circulaires est loin d'être complète : ainsi, les formules d'addition ne sont rationnelles qu'autant qu'on y introduit $\operatorname{dn} x$, et n'ont pas la même forme que les formules relatives aux fonctions circulaires. De plus $\sin x$ et $\cos x$ satisfont à une même équation différen-

tielle de la forme

$$y'^2 = 1 - y^2,$$

et il n'en est pas de même de $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ qui satisfont à des équations analogues à la précédente, mais différentes entre elles. Enfin, tandis qu'entre $\sin \frac{\pi}{2k} x$ et $\cos \frac{\pi}{2k} x$, existent les relations

$$\sin \frac{\pi}{2k} (k \pm x) = \cos \frac{\pi}{2k} x, \qquad \cos \frac{\pi}{2k} (k \pm x) = \mp \sin \frac{\pi}{2k} x,$$

entre $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ n'existent pas de relations analogues.

Ainsi, sauf la relation $\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1$, identique à la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on ne trouve que des analogies assez lointaines entre les deux premières fonctions elliptiques et les fonctions circulaires. La nécessité de l'introduction d'une troisième fonction $\operatorname{dn} x$ avec $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, pour rendre rationnelles les formules, nécessité qu'on peut expliquer par ce fait que les fonctions elliptiques sont d'ordre supérieur aux fonctions circulaires, montre également que l'analogie est loin d'être complète. On peut penser que l'analogie cherchée ne se présente que pour $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, parce que ces fonctions élémentaires ont été mal choisies et, en effet, de nombreuses recherches ont été faites dans ce sens, tant au point de vue purement analytique qu'au point de vue de la représentation géométrique des fonctions elliptiques. La fonction $p(u)$ de Weierstrass a été inventée dans ce but; mais si l'introduction de cette fonction dans la théorie simplifie quelques calculs, et si cette fonction présente quelques analogies avec les fonctions circulaires, notamment au point de vue des développements en série et en produits infinis, on ne trouve pas dans cette théorie deux fonctions corrélatives comme

$\sin x$ et $\cos x$, et d'autre part l'introduction nécessaire des fonctions σ, dans cette théorie, n'est qu'une modification, sans grand avantage, au point de vue qui nous occupe, des fonctions Θ de Jacobi.

La Note présente a pour but de montrer qu'on pourrait choisir comme éléments de la théorie des fonctions elliptiques, deux fonctions présentant par leurs propriétés analytiques, une analogie complète avec les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, en sorte que cette analogie pourra servir d'indication pour les recherches et les applications ultérieures.

I. Les deux fonctions dont il s'agit sont : la fonction

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H}{\Theta} = \operatorname{sn} x = \sin \operatorname{am} x$$

qui sera l'analogue du sinus, et la fonction

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1}{\Theta_1} = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \sin \operatorname{co-am} x$$

qui sera l'analogue du cosinus.

Ces fonctions sont toutes deux connues depuis Jacobi ; mais leurs propriétés corrélatives n'ont pas, à notre connaissance, été étudiées jusqu'ici.

Les expressions de u et de v, en fonction des transcendantes Θ, ou des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, permettent d'étudier facilement leurs relations et leurs propriétés, aussi nous contenterons-nous de les énoncer :

1° $u(x)$ et $v(x)$ sont liées par une relation algébrique linéaire en u^2 et v^2

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2 \text{ [1]}.$$

---

[1] Pour certains calculs, il y a avantage à mettre cette relation sous l'une des deux formes

$$(1 - u^2)(1 - v^2) = k'^2 u^2 v^2, \qquad (1 - k^2 u^2)(1 - k^2 v^2) = k'^2.$$

2° $u(0) = 0$, $v(0) = 1$.

3° Les substitutions de u et de v sont respectivement

$$4mK + 2niK' + x \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$2(2m+1)K + 2niK' - x,$$

et

$$4mK + 2niK' \pm x.$$

On les obtient donc, en ajoutant la même période [1] imaginaire $2iK'$, aux substitutions des fonctions circulaires $\sin \frac{\pi}{2K} x$, $\cos \frac{\pi}{2K} x$, qui sont respectivement

$$4mK + x,$$
$$2(2m+1)K - x$$

et

$$4mK \pm x,$$

et ceci n'a pas lieu pour $\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$, car la période imaginaire de $\operatorname{cn} x$ est $2(K + iK')$.

4° Les fonctions u et v satisfont aux relations

$$u(K \pm x) = v(x), \qquad v(K \pm x) = \mp u(x),$$

relations identiques à celles qui lient

$$\sin \frac{\pi}{2K} x, \quad \cos \frac{\pi}{2K} x, \quad \sin \frac{\pi}{2K} (K \pm x), \quad \cos \frac{\pi}{2K} (K \pm x).$$

5° u et v satisfont toutes deux à la même équation différentielle

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

analogue à l'équation $y'^2 = (1 - y^2)$ à laquelle la précédente se réduit pour $k = 0$ et à laquelle satisfont $\sin x$ et $\cos x$.

---

(1) C'est en partant de cette idée que « les deux fonctions élémentaires cherchées ne devaient différer des sinus et cosinus que par l'introduction d'une même période imaginaire » que nous avons été amené, par notre méthode générale de formation d'une fonction au moyen de son groupe de substitutions, à la considération de $v(x)$.
(*Loc. cit.*)

On a d'ailleurs

$$u'_x = +\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \qquad v'_x = -\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)},$$

formules qui se réduisent, pour $k=0$, à leurs analogues

$$u'_x = -\sqrt{1-u^2}, \qquad v'_x = -\sqrt{1-v^2},$$

du cas des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$.

On a aussi

$$u'_x = +k'^2\frac{v}{1-k'^2v^2} = +v(1-k^2u^2),$$

$$v'_x = -k'^2\frac{u}{1-k^2u^2} = -u(1-k^2v^2),$$

formules rationnelles analogues aux formules

$$u'_x = +v, \qquad v'_x = -u,$$

du cas des fonctions circulaires $u=\sin x$, $v=\cos x$.

6° u et v possèdent un théorème d'addition dont les formules

$$u(x+a) = \frac{u_x v_a + u_a v_x}{1 - k^2 u_x v_x u_a v_a},$$

$$v(x+a) = \frac{v_x v_a - u_x u_a}{1 - k^2 u_x v_x u_a v_a}$$

sont rationnelles (¹) et ne contiennent comme éléments que ces deux mêmes fonctions, et présentent une analogie complète avec les formules d'addition des fonctions $u=\sin x$, $v=\cos x$,

$$u(x+a) = u_x v_a + u_a v_x, \qquad v(x+a) = v_x v_a - u_x u_a,$$

auxquelles elles se réduisent pour $k=0$.

(¹) On peut donner à ces formules d'autres formes qui peuvent être utiles dans quelques cas

$$u_{x+a} = \frac{u_x v_a + u_a v_x - k^2 u_a u_x (u_x v_x - u_a v_a)}{1 - k^2 u_x^2 u_a^2} = \frac{u_x v_x + u_a v_a}{u_x u_a + v_x v_a}, \quad \dots$$

De ces formules on tire les formules de multiplication

$$u(2x) = \frac{2u_x v_x}{1 + k^2 u_x^2 v_x^2} = \frac{2u_x\sqrt{(1-u_x^2)(1-k^2u_x^2)}}{1-k^2u_x^4}$$

$$= \frac{2v_x\sqrt{(1-v_x^2)(1-k^2v_x^2)}}{1-k^2v_x^4},$$

$$v(2x) = \frac{v_x^2 - u_x^2}{1-k^2u_x^2v_x^2} = -\frac{1-2v_x^2-k^2v_x^4}{1-2k^2v_x^2+k^2v_x^4}$$

$$= \frac{1-2u_x^2-k^2u_x^4}{1-2k^2u_x^2+k^2u_x^4},$$

$$u(3x) = \frac{3u_xv_x^2 - u_x^3 - k^2u_x^3v_x^3(u_x^2 - v_x^2)}{1+2k^2u_x^2v_x^2(v_x^2-u_x^2) - k^4u_x^4v_x^4},$$

$$v(3x) = \frac{v_x^3 - 3u_x^2v_x + k^2u_x^2v_x^3(u_x^2 - v_x^2)}{1-2k^2u_x^2v_x^2(v_x^2-u_x^2) - k^4u_x^4v_x^4},$$

. . . .

formules analogues aux suivantes

$$u(2x) = 2u_xv_x = 2u_x\sqrt{1-u_x^2} = 2v_x\sqrt{1-v_x^2},$$

$$v(2x) = v_x^2 - u_x^2 = -(1-2v_x^2) = 1-2u_x^2,$$

$$u(3x) = 3u_xv_x^2 - u_x^3,$$

$$v(3x) = v_x^3 - 3u_x^2v_x.$$

. . . .

du cas des fonctions circulaires.

On pourra de même former $u(4x)$, $v(4x)$ et arriver à $u(mx)$, $v(mx)$ en opérant de proche en proche à l'aide des formules d'addition.

Les formules obtenues seront toutes rationnelles en u_x, v_x et ne contiendront que ces deux fonctions, et l'on conçoit qu'on pourra, dans une certaine mesure au moins, discuter les valeurs de $u\left(\frac{x}{2}\right)$, $v\left(\frac{x}{2}\right)$, $u\left(\frac{x}{3}\right)$, $v\left(\frac{x}{3}\right)$, ... En particulier, on peut conclure immédiatement de nos formules que $u\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $v\left(\frac{x}{2^n}\right)$ s'expriment par radicaux au moyen des fonctions $u(x)$, $v(x)$.

Des formules d'addition, on tire encore les sui-

vantes [1]

$$u(x+a) - u(x-a) = 2u_a v_x \frac{1 - k^2 u_x^2 v_a^2}{1 - k^2 u_a^2 v_a^2 u_x^2 v_x^2}$$
$$= 2u_a v_x \frac{k'^2}{k'^2 - k^2(1 - v_x^2)(1 - u_a^2)},$$

$$u(x+a) + u(x-a) = 2u_x v_a \frac{1 - k^2 u_a^2 v_x^2}{1 - k^2 u_a^2 v_a^2 u_x^2 v_x^2}$$
$$= 2u_x v_a \frac{k'^2}{k'^2 - k^2(1 - v_a^2)(1 - u_x^2)},$$

$$v(x+a) + v(x-a) = 2v_x v_a \frac{1 - k^2 u_a^2 u_x^2}{1 - k^2 u_a^2 v_a^2 u_x^2 v_x^2}$$
$$= 2v_x v_a \frac{k'^2}{k'^2 - k^2(1 - v_x^2)(1 - v_a^2)},$$

$$v(x+a) - v(x-a) = -2u_x u_a \frac{1 - k^2 v_a^2 v_x^2}{1 - k^2 u_a^2 v_a^2 u_x^2 v_x^2}$$
$$= -2u_x u_a \frac{k'^2}{k'^2 - k^2(1 - u_x^2)(1 - u_a^2)},$$

formules analogues aux suivantes

$$u(x+a) - u(x-a) = 2u_a v_x,$$
$$u(x+a) + u(x-a) = 2u_x v_a,$$
$$v(x+a) + v(x-a) = 2v_x v_a,$$
$$v(x+a) - v(x-a) = -2u_x u_a,$$

auxquelles elles se réduisent pour $k = 0$, et qui sont relatives au cas des fonctions circulaires $u = \sin x$, $v = \cos x$.

On peut ajouter à ces propriétés de nos fonctions u et v la suivante

$$u(iK' + x) = \frac{1}{k u(x)}, \qquad v(iK + x) = \frac{1}{k v(x)}.$$

[1] On peut aussi donner à ces formules la forme

$$u(x+a) + u(x-a) = 2u_x v_a \frac{v_a^2 - u_x^2}{v_x^2 v_a^2 - u_x^2 u_a^2},$$

$$u(x+a) - u(x-a) = 2u_a v_x \frac{v_x^2 - u_a^2}{v_x^2 v_a^2 - u_x^2 u_a^2}, \quad \ldots.$$

qui n'a pas d'analogues dans les fonctions circulaires, car elle est relative à la période imaginaire des fonctions elliptiques et est donc particulière à celles-ci.

Nous avons formé ainsi le Tableau des principales propriétés corrélatives des deux fonctions

$$u = \sin \operatorname{am} x, \qquad v = \sin \operatorname{co-am} x,$$

et l'on voit que ces propriétés sont complètement analogues aux propriétés corrélatives des fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$.

Ces propriétés conduisent à penser que toute la théorie des fonctions elliptiques pourrait être édifiée sur les deux seules fonctions u et v, y compris les théories relatives à la multiplication et à la transformation. En effet, si, dans ces théories, il a été jusqu'ici plus simple de se servir des fonctions à multiplicateur, Θ ou ϑ, cela tenait à ce que les formules en $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$ ne sont rationnelles qu'autant qu'on introduit $\operatorname{dn} x$; les peu nombreuses analogies qui existent, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, d'une part, $\sin x$, $\cos x$, d'autre part, sont alors masquées par la présence de $\operatorname{dn} x$; mais une théorie fondée sur nos deux fonctions u et v présenterait une analogie complète avec la théorie des fonctions circulaires; il serait d'ailleurs inutile de faire intervenir les fonctions Θ ou ϑ dans cette théorie élémentaire, les deux fonctions u et v étant complètement déterminées par les égalités

$$u' = -\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \qquad u(0) = 0,$$
$$v' = -\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}, \qquad v(0) = 1.$$

On peut prévoir que toutes les fonctions elliptiques s'exprimeront d'une manière simple par la transformation ou la multiplication de nos fonctions u et v. C'est ce que nous pensons avoir démontré dans l'étude suivante, où nous montrons comment $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$ d'une

part, $p(u)$ d'autre part, peuvent être obtenues par la transformation et la multiplication de la fonction $v = \sin \text{co-am}\, x$; comme toute fonction de première espèce s'exprime au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ ou de $p(u)$, il s'ensuivra que : *toute fonction de première espèce s'exprime au moyen de nos fonctions u et v ou de leurs transformées.*

II. Considérons les quatre fonctions de Jacobi Θ, H, Θ_1, H_1. On peut former par les rapports de ces fonctions prises deux à deux, douze fonctions elliptiques inverses deux à deux. Nous considérerons les six fonctions suivantes :

$$u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}}{\Theta} = \operatorname{sn} x,$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}}{\Theta_1} = k' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x},$$

$$u_2 = \frac{1}{i\sqrt{k'}} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1} = \frac{\operatorname{sn} x}{i \operatorname{cn} x},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}_1}{\Theta_1} = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1}{\Theta} = \operatorname{cn} x,$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\Theta}{\Theta_1} = \frac{1}{\operatorname{dn} x},$$

les six autres n'étant que les inverses de celles-là [1].

Nous allons montrer que u_1 et v_1 d'une part, u_2 et v_2 d'autre part, peuvent être obtenues par multiplication de l'argument et transformation du module de u et de v.

---

[1] Depuis Jacobi, on classe ordinairement ces douze fonctions par groupes de trois, sous les dénominations $\sin \mathrm{am}\, x$, $\cos \mathrm{am}\, x$, $\Delta \mathrm{am}\, x$, etc.; c'est, pensons-nous, ce qui fait que les propriétés corrélatives de ces fonctions, prises deux à deux, ont échappé jusqu'ici à l'attention des mathématiciens.

On a, pour déterminer u_1 et v_1, les équations

$$u_1' = -\sqrt{(1-u_1^2)(k'^2+k^2u_1^2)}, \qquad u_1(0) = 0,$$
$$v_1' = -\sqrt{(1-v_1^2)(k'^2-k^2v_1^2)}, \qquad v_1(0) = 1.$$

Si l'on pose

$$k_1 = \frac{k_i}{k'}, \qquad g_1 = k',$$

les équations différentielles précédentes deviennent

$$u_1' = -g_1\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1u_1^2)},$$
$$v_1' = -g_1\sqrt{(1-v_1^2)(1-k_1^2v_1^2)},$$

ce qui montre que u_1 et v_1 sont des fonctions analogues à u et v, dans lesquelles l'argument est multiplié par g et le module est k_1 ; par conséquent les fonctions u_1 et v_1 peuvent être obtenues au moyen de u et de v, par les opérations connues sous les noms de *multiplication* et de *transformation*. Les fonctions u_1 et v_1 satisfont donc, avec le module k_1, aux relations qui existent entre u et v. On peut d'ailleurs vérifier directement ces relations. Ainsi :

1° La relation qui lie u_1 et v_1

$$k'^2(u_1^2 - v_1^2) = k'^2 - k^2u_1^2v_1^2$$

devient, en posant $\dfrac{k_i}{k'} = k_1$,

$$u_1^2 + v_1^2 = 1 + k_1^2u_1^2v_1^2,$$

relation qui ne diffère que par le changement du module k en k_1 de la relation qui lie u et v

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2u^2v^2.$$

2° Les substitutions qui laissent u_1 invariable sont :

$$4mK + 2n(K + iK') + x,$$
$$2(2m+1)K + 2n(K + iK') - x;$$

celles de v_1 sont

$$4mK + 2m'(K + iK') \pm x.$$

Elles ne diffèrent donc de celles de $\sin \frac{\pi}{2K} x$, $\cos \frac{\pi}{2K} x$, que par l'introduction d'une même période imaginaire $2(K + iK')$. Il est à remarquer, au point de vue de la périodicité, que la multiplication et la transformation indiquées de l'argument et du module de u et de v, n'ont fait que changer la période imaginaire $2iK'$ en la période imaginaire $2(K + iK')$.

3° On a

$$u_1(K - x) = v_1(x), \qquad v_1(K - x) = u_1(x).$$

On vérifiera également que u_1 et v_1 ont le même théorème d'addition que u et v.

Considérons maintenant u_2 et v_2. Ces deux fonctions peuvent être considérées comme déterminées par les équations différentielles suivantes, qu'on obtient facilement grâce aux expressions que nous avons données de ces fonctions au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ ou des fonctions Θ

$$u_2' = -i\sqrt{(1 - u_2^2)(1 - k'^2 u_2^2)},$$
$$u_2(0) = 0,$$
$$v_2' = i\sqrt{(1 - v_2^2)(1 - k'^2 v_2^2)},$$
$$v_2(0) = 1.$$

Si donc on pose $g_2 = -i$, $h_2 = k'$, les équations précédentes deviennent

$$u_2' = g_2\sqrt{(1 - u_2^2)(1 - h_2^2 u_2^2)},$$
$$v_2' = -g_2\sqrt{(1 - v_2^2)(1 - h_2^2 v_2^2)},$$

et il s'ensuit que u_2 et v_2 sont obtenues par la transformation du module k ou k' et la multiplication de l'argument par $-i$, des fonctions u et v.

Ceci suffit pour affirmer que u_2 et v_2 ont les mêmes propriétés corrélatives que u et v. On peut d'ailleurs vérifier directement ces propriétés au moyen des expressions que nous avons données de u_2 et de v_2.

Ainsi la relation qui lie u_2 et v_2 est

$$u_2^2 + v_2^2 = 1 - k'^2 u_2^2 v_2^2,$$

et s'obtient par le changement de k en k' dans la relation qui lie u et v.

u_2 a pour substitutions

$$4miK' + 2nK \pm x,$$
$$2(2m+1)iK' + 2nK - x.$$

Celles de v_2 sont

$$4miK' + 2nK \pm x.$$

Ces substitutions ne diffèrent respectivement de celles de $\sin \frac{\pi}{2iK} x$ et de $\cos \frac{\pi}{2iK} x$ que par l'introduction de la *même* période réelle $2K$. Il est à remarquer que la multiplication de l'argument par $-i$ et la transformation du module k en k' dans les fonctions u et v n'ont fait que permuter les quantités K et iK' dans les substitutions de ces fonctions.

Enfin l'on a

$$u_2(iK' \pm x) = v_2(x), \qquad v_2(iK' \pm x) = \mp u_2(x).$$

En résumé, les fonctions u_1 et v_1, u_2 et v_2 et, par suite, toutes les fonctions elliptiques de première espèce qu'on pourra considérer pourront être obtenues, au moyen de u et de v, par une transformation et une multiplication convenables. Et, comme les fonctions de deuxième et de troisième espèces peuvent s'exprimer au moyen de celles de première espèce, on voit que nos fonctions u et v suffisent comme éléments de la théorie des fonctions elliptiques.

Si, au point de vue analytique, on appelle *sinus elliptique* et *cosinus elliptique* deux fonctions telles que u et v, on pourra écrire, en mettant en évidence le module et le multiplicateur

$$u = \sin_e(k, x) = \operatorname{sn} x,$$

$$u_1 = \sin_e\left(\frac{ki}{k'}, k'x\right),$$

$$u_2 = \sin_e(k', -ix),$$

$$v = \cos_e(k, x),$$

$$v_1 = \cos_e\left(\frac{ki}{k'}, k'x\right) = \operatorname{cn} x,$$

$$v_2 = \cos_e(k', -ix) = \frac{1}{\operatorname{dn} x},$$

et l'on voit que tout problème sur les fonctions elliptiques pourra être résolu au moyen de deux seules fonctions de la forme

$$\sin_e(k, gx), \qquad \cos_e(k, gx).$$

La transformation

$$u = f(s),$$

qui permettrait de passer d'un sinus elliptique

$$u = \sin_e(k, x)$$

à un autre sinus

$$s = \sin_e(h, gx),$$

est déterminée par les équations différentielles

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \quad [u(0) = s(0) = 0],$$

$$\frac{ds}{dx} = g\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = dx = \frac{ds}{g\sqrt{(1-s^2)(1-h^2s^2)}},$$

d'où

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{(1-u^2)(1-k^2u^2)}{(1-s^2)(1-h^2s^2)}}.$$

Dans cette équation, on peut considérer s comme la variable, u comme la fonction : l'intégrale u de cette équation différentielle est donc la fonction de s cherchée $u=f(s)$; la constante d'intégration est d'ailleurs déterminée par cette condition qu'une valeur de $u=f(s)$ s'annule en même temps que s, car $u=\sin_e(k,x)$, et $s=\sin_e(h,gx)$ s'annulent en même temps pour $x=0$; mais les autres zéros de $u(x)$ et $s(x)$ ne sont pas généralement communs et la fonction $u=f(s)$ n'est pas généralement une fonction uniforme pas plus que l'inverse de cette fonction.

L'intégrale générale de l'équation différentielle précédente convient également à la transformation de la fonction

$$v = \cos_e(k, x)$$

en la fonction

$$t = \cos_e(h, gx),$$

car on obtient l'équation en v et t, en changeant u en v, s en t dans la précédente. Mais la constante d'intégration n'est plus la même, car elle est ici déterminée par les conditions

$$v(0) = 1 = t(0),$$

c'est-à-dire qu'une valeur de $v=f(t)$ doit devenir égale à l'unité quand la variable t prend elle-même cette valeur. En ne fixant pas la valeur de la constante λ d'intégration, nous pouvons dire que la transformation de u en s et celle de v en t s'obtiennent *toutes deux* par la même fonction de transformation

$$f(\lambda, s) \quad \text{ou} \quad f(\lambda, t),$$

intégrale générale de l'équation différentielle que nous avons donnée plus haut.

Il est intéressant de rechercher ce qu'est la fonction $\frac{u}{v}$, rapport de nos sinus et cosinus elliptiques, car elle est susceptible de simplifier certaines formules, comme cela arrive pour $\tang x$ dans le cas des fonctions circulaires.

On voit facilement que cette fonction ne se distingue pas de u et v par des propriétés particulières, comme le fait $\tang x$ de $\sin x$ et $\cos x$; ses substitutions sont

$$2m(K + iK') + 2niK' - x,$$
$$(2m-1)(K + iK') + 2niK' - x;$$

$\frac{u}{v}$ est donc, à une transformation linéaire près, *un sinus elliptique* de la forme

$$\sin_e(h, gx).$$

Pour trouver cette transformation ainsi que le module h et le multiplicateur g, posons $w = \frac{u}{v}$ et formons l'équation différentielle en w. On trouve

$$w'^2 = (1 - w^2)^2 - 4k^2 w^2,$$

équation qui, par la transformation

$$w = (k - k'i)z,$$

devient

$$z'^2 = (ki - k')^2(1 - z^2)[1 - (k - k'i)^4 z^2].$$

On a donc

$$z = \sin_e(h, gx),$$

avec

$$g = k - k'i,$$
$$h = (k - k'i)^2,$$

et

$$w = \frac{u}{v} = (k - k'i)\sin_e(h, gx)$$
$$= (k - k'i)\sin_e[(k - k'i)^2, (k - k'i)x].$$

Toutefois, la fonction $\frac{u}{v}$ pourra être utilisée dans les

formules contenant u et v, de la même manière que tang x est utilisée dans les formules des fonctions circulaires.

Considérons encore la fonction pu de Weierstrass, déterminée par les égalités

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 \qquad \left(\frac{1}{p(0)} = 0\right).$$

Les substitutions de pu sont de la forme

$$2m\omega + 2n\omega' \pm u \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction est donc, à une transformation linéaire près, un *cosinus elliptique*.

Pour trouver cette transformation et ce cosinus, remarquons que ce dernier devient égal à *un* lorsque l'argument s'annule, tandis que pu devient infinie. Nous poserons donc

$$pu = \frac{a + bt}{1 - t},$$

t étant le cosinus cherché, ou encore

$$pu = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)t}{1 - t} = \alpha + \beta\frac{1 + t}{1 - t}.$$

Portant cette expression de pu dans l'équation différentielle en $p(u)$, on trouve aisément que pour que cette équation différentielle se réduise à la forme

$$t'^2 = g^2(1 - t^2)(1 - h^2 t^2),$$

il est nécessaire et suffisant que

$$4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3 = 0,$$
$$4\beta^2 = 12\alpha^2 - g_2;$$

α doit donc être l'une des trois racines désignées par e_1, e_2, e_3 par Weierstrass :

$$\alpha = e_1, e_2, e_3 = p\omega, p\omega', p\omega'' \qquad (\omega'' = \omega + \omega'),$$
$$2\beta = \sqrt{12\alpha^2 - g_2} = \sqrt{2p''(\omega)}, \sqrt{2p''(\omega')}, \sqrt{2p''(\omega'')}.$$

(le signe $+$ devant les radicaux est le seul qui convienne).

La transformation cherchée est donc

$$pu = p\omega + \frac{\sqrt{2p''\omega}}{2}\,\frac{1+t}{1-t},$$

où l'on peut remplacer ω par ω', ou ω''.

t est le cosinus elliptique déterminé par l'équation

$$t'^2 = (3p\omega + \sqrt{2p''\omega})(1-t^2)\left(1 - \frac{3p\omega - \sqrt{2p''\omega}}{3p\omega + \sqrt{2p''\omega}}\,t^2\right).$$

Nous l'écrirons donc

$$t = \cos_e\left[\sqrt{\frac{3p\omega - \sqrt{2p''\omega}}{3p\omega + \sqrt{2p''\omega}}},\ (3p\omega + \sqrt{2p''\omega})\,u\right]$$

où ω a la même valeur que plus haut.

Posant $\omega = \omega_1$, $\omega'' = \omega_2$, $\omega' = \omega_3$, nous avons donc pour exprimer pu au moyen du cosinus elliptique dont cette fonction a les substitutions, les trois formules suivantes :

$$pu = p\omega_j + \frac{\sqrt{2p''\omega_j}}{2}\,\frac{1 + \cos_e(h_j, g_j u)}{1 - \cos_e(h_j, g_j u)}$$

$$(\omega_j = \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

dans lesquelles on a

$$g_j = \pm(3p\omega_j + \sqrt{2p''\omega_j}),$$

$$h_j = \sqrt{\frac{3p\omega_j - \sqrt{2p''\omega_j}}{3p\omega_j - \sqrt{2p''\omega_j}}}.$$

Nous ne nous étendrons pas davantage sur l'emploi des fonctions que nous venons d'indiquer pour exprimer toutes les fonctions elliptiques. Mais nous nous permettrons de proposer de prendre pour éléments de la théorie des fonctions elliptiques deux fonctions telles que u et v, ce choix devant donner de grandes simplifi-

cations tant dans les applications que dans la théorie, notamment dans la formation et l'usage de tables numériques de *sinus* et *cosinus elliptiques,* tables qu'on a essayées sans grand succès jusqu'ici en se servant soit des fonctions $\operatorname{sn} x$ et $\operatorname{cn} x$, soit de la fonction pu.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1663.

(1894, p. 5*)

Si deux variables imaginaires z et z' sont reliées par la relation homographique

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des quantités imaginaires et si l'une des variables z' décrit une courbe C', la variable z décrit une courbe C qui est superposable à l'une des transformées par rayons vecteurs réciproques de la courbe C'.

Si la courbe C' n'est autre que l'axe des x, la courbe C est, par suite, un cercle. (E. Amigues).

SOLUTION

Par M. J. Destoux.

De la relation

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

on tire

$$(1) \qquad \left(z - \frac{a}{c}\right)\left(z' + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Posons

$$z - \frac{a}{c} = \rho e^{i\theta}, \qquad z' + \frac{d}{c} = \rho' e^{i\theta'}, \qquad \frac{bc - ad}{c^2} = r e^{i\varphi},$$

on a

$$\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} = r e^{i\varphi}.$$

d'où

$$\rho\rho' = r, \quad \theta' - \theta = \varphi.$$

Ces égalités montrent que, si l'on prend le point $-\frac{d}{c}$ pour pôle d'inversion, il existe une transformée par rayons vecteurs réciproques de C' qui est superposable à C. On opérera cette superposition en faisant glisser la courbe C parallèlement à elle-même, de manière que le point $\frac{a}{c}$, considéré comme invariablement lié à C, parcourt la droite $cz - a = (a - d)t$, et vienne coïncider avec $-\frac{d}{c}$; on fera ensuite tourner la courbe C autour de $-\frac{d}{c}$ de l'angle $-\varphi$ dans son plan, et de 180° autour de la parallèle à Ox menée par $-\frac{d}{c}$ et choisie comme axe.

De ce qui précède, il résulte que lorsque z' parcourt une ligne droite quelconque du plan, en particulier l'axe des x, le point z parcourt un cercle.

Question 1667.

(189[illegible], p. 28[illegible].)

Un point M *parcourt une ellipse de foyers* F *et* F'. *Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux cercles de diamètres* FF' *et* FM *est une conique ayant un foyer au centre de l'ellipse.* (Barisien.)

SOLUTION

par M. H. L[illegible].

Soient x, y les coordonnées du point M pris sur l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

celles du milieu de FM seront

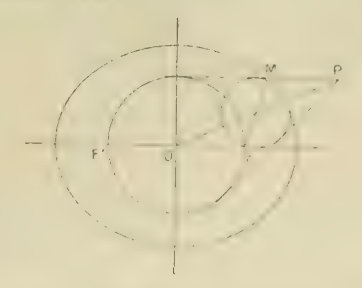
$$X = \frac{c+x}{2}, \quad Y = \frac{y}{2},$$

et le cercle décrit sur FM comme diamètre sera représenté

par

$$\left(x - \frac{c + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - ex'}{2}\right)^2,$$

puisque $\mathrm{FM} = (a - ex')$.



Or, le cercle décrit sur FF', comme diamètre, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

le point de rencontre P des tangentes extérieures sera déterminé par

$$x = \frac{c(c - x')}{2c - ex' - a}, \qquad y = \frac{y'c}{2c - ex' - a}.$$

De ces expressions, on tire

$$y' = \frac{y}{x}(c - x'), \qquad y'c = y(2c + ex' - a),$$

et celles-ci donnent à leur tour

$$x' = \frac{(2c - a)x - c^2}{c - ex}, \qquad y' = \frac{y(2c - a - ec)}{c - ex}.$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

on trouvera, pour le lieu du point P, la conique Σ

$$x^2[(a - c)^2 - 4c^2] + 4c^2(a + c)x$$
$$+ y^2(a - c)^2 - c^2(a + c)^2 = 0.$$

Mettant cette équation sous la forme

$$(x^2 + y^2)(a - c)^2 = c^2[2x - (a + c)]^2,$$

on voit facilement que la conique Σ a pour foyer le centre de l'ellipse et pour directrice correspondante

$$2x = a + c.$$

QUESTIONS.

1805. Étant donnée l'équation

$$\varphi(x) = ax^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} - \ldots - nkx + l = 0,$$

dont le degré $n = 2\nu$ est pair, si l'on désigne par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ les dérivées successives de $\varphi(x)$, divisées respectivement par n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, ..., l'équation en z,

$$\begin{vmatrix} \varphi_\nu + z & \varphi_{\nu-1} & \varphi_{\nu-2} & \ldots & \varphi \\ \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu - \frac{z}{\nu} & \varphi_{\nu-1} & \ldots & \varphi_1 \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu + \frac{1.2}{\nu(\nu-1)}z & \ldots & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots & \varphi_\nu \mp \frac{z}{\nu} & \varphi_{\nu-1} \\ 0 & \varphi_{n-1} & \ldots & \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu \pm z \end{vmatrix} = 0,$$

est indépendante de x.

Trouver les relations qui lient les racines de l'équation en x à celles de l'équation en z. (P. SONDAT.)

1806. On considère une série d'ellipses concentriques et ayant même direction d'axes et un point fixe M de leur plan. Soit TT′ la corde polaire de l'une de ces ellipses par rapport à M. Le lieu du foyer des paraboles bitangentes à l'ellipse en T et T′ est la droite qui joint les projections de M sur les axes des ellipses. (E.-N. BARISIEN.)

1807. Soient M un point du plan d'une ellipse et PQ la corde polaire de cette ellipse par rapport à M. Le lieu des points M tels que la parabole bitangente à l'ellipse en P et Q ait son foyer sur l'ellipse se compose des deux cercles de Chasles, concentriques à l'ellipse et ayant pour diamètres la somme ou la différence des axes de l'ellipse.

(E.-N. BARISIEN.)

[K9a][R2b]

APPLICATIONS DES MÉTHODES DE GRASSMANN. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN QUADRILATÈRE ET D'UN PENTAGONE;

PAR M. F. CASPARY.

Il y a seulement quelques années que les géomètres se sont persuadés de la fécondité et de la puissance des méthodes de Grassmann. Ces méthodes s'adaptent, d'une manière remarquable, à la Géométrie, à l'Analyse, à la Mécanique et à la Physique mathématique; elles rattachent l'intuition au calcul et elles forment le lien entre les méthodes synthétiques et analytiques des Mathématiques pures et appliquées.

En France, M. E. Carvallo, le premier, a dirigé l'attention sur ces méthodes importantes ([1]).

M. Carvallo m'a fait l'honneur d'analyser ([2]) le Mémoire que j'ai publié sur la génération des courbes gauches algébriques ([3]), et de signaler mes deux Mémoires : *Sur les cubiques gauches* ([4]) et *Sur une méthode générale de la Géométrie qui forme le lien entre la Géométrie synthétique et la Géométrie analytique* ([5]), en les prenant comme point de départ pour

([1]) *Voir* aussi la Note de M. H. FEHR, *Sur l'emploi de la multiplication extérieure en Algèbre* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIV, p. 74; 1895)

([2]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 158; 1887.

([3]) *Journal de M. Kronecker*, t. C, p. 405; 1887.

([4]) *Bulletin de M. Darboux*, 2e série, t. XI, p. [illegible]; 1887.

([5]) *Ibid.*, t. XIII, p. [illegible]; 1889.

ses propres recherches, consacrées à l'exposition et à l'application des méthodes de Grassmann ([1]).

Dans les Mémoires que je viens de citer et dans deux autres ([2]), j'ai exposé une partie des principes et des calculs, dus à Grassmann, et j'y en ai fait usage. De même dans mes autres recherches, relatives à la Géométrie ([3]) et à la théorie des fonctions thêta, des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques, j'ai employé, pour leur invention, les mêmes principes et calculs; mais, pour la publication, je me suis servi des méthodes usuelles, parce que les méthodes de Grassmann n'étaient pas assez connues.

Bien que, depuis une dizaine d'années, le nombre des géomètres ait fortement grandi ([4]) qui s'intéressent aux méthodes de Grassmann et s'en s'occupent, elles ne sont pas répandues jusqu'à ce jour et elles n'ont point la place qu'elles méritent. Pour contribuer à leur connaissance et pour les rendre familières aux géomètres, je me propose, dans une série d'articles, d'en donner des applications. Comme le but de ces articles est essentiellement didactique, je passe des applications les plus simples aux applications plus élevées. En me bornant, dans les premiers articles, à la Géométrie du plan, je vais donner successivement des applications

---

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. X, p. 219, 341, 345; 1891; t. XI, p. 8; 1892; t. XII, p. 65, 454; 1893.

([2]) *Journal de M. Kronecker*, t. XCII, p. 123, 1882; t. XCV, p. 36, 1883.

([3]) Voir *Journal de M. Kronecker*, t. XCIX, p. 128, 1885; *Comptes rendus*, t. CXII, p. 1356, 1891; *Bulletin de M. Darboux*, 2e série, t. XV, p. 308; 1891.

([4]) *Voir* l'intéressant Aperçu historique de M. V. Schlegel : *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren* (*Schlömilch's Zeitschrift. Hist. lit. Abth. Jahrgang* XLI, p. 41; 1896).

relatives aux *points*, aux *vecteurs* et aux *lignes droites*. Je commence par établir quelques définitions, dont j'ai besoin pour l'application en question, et je vais déduire plus tard toutes ces définitions d'une seule définition grassmannienne. Par cette manière de procéder, j'espère initier rapidement le lecteur, sans le fatiguer, aux principes des méthodes de Grassmann et lui en montrer la portée.

Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone.

1. *Définitions.* — En représentant par des majuscules de l'alphabet latin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... des *points*,

1° Le point $\mathcal{M} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ représente le milieu du segment $\mathcal{AB}$;

2° Le point $\mathcal{O} = \dfrac{\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}}{\alpha + \beta}$ représente un point quelconque de la droite $\mathcal{AB}$, α et β étant des paramètres quelconques;

3° Le point $\mathcal{G} = \frac{1}{3}(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})$ représente le centre de gravité du triangle homogène dont $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les sommets;

4° La différence $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ représente, en grandeur, sens et direction, le vecteur $\mathcal{AB}$, issu de $\mathcal{A}$ et finissant à $\mathcal{B}$;

5° L'égalité $\mathcal{B} - \mathcal{A} = \mathcal{D} - \mathcal{C}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ étant quatre points non situés sur la même droite, exprime : 1° que les deux vecteurs $\mathcal{AB}$ et $\mathcal{CD}$ sont égaux en grandeur; 2° qu'ils possèdent le même sens, de façon que les points $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont leurs points d'origine, les points $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ leurs points extrêmes; et, 3° que leurs directions sont parallèles.

Comme de l'égalité $\mathcal{B} - \mathcal{A} = \mathcal{D} - \mathcal{C}$ se déduit

$\mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{C} - \mathcal{A}$, le point $\mathcal{D}$ se construit en menant par $\mathcal{C}$ une parallèle à $\mathcal{AB}$ et en faisant $\mathcal{CD} = \mathcal{AB}$; ou en menant par $\mathcal{B}$ une parallèle à $\mathcal{AC}$ et en faisant $\mathcal{BD} = \mathcal{AC}$. Autrement le point $\mathcal{D}$ se construit en menant par $\mathcal{C}$ une parallèle à $\mathcal{AB}$, et par $\mathcal{B}$ une parallèle à $\mathcal{AC}$. Par conséquent le point $\mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{C} - \mathcal{A}$ est le quatrième sommet, opposé à $\mathcal{A}$, d'un parallélogramme dont $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les trois autres sommets.

A. *Centre de gravité d'un quadrilatère.*

2. Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ les quatre sommets d'un quadrilatère quelconque; en le divisant par la diagonale $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ en deux triangles $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ dont les aires soient δ_1 et δ_3 et dont les centres de gravité sont (définition 3°) $\frac{1}{3}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4)$ et $\frac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4)$, le centre de gravité $\mathcal{G}$ du quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ sera représenté par

$$\begin{aligned}3(\delta_1 + \delta_3)\mathcal{G} &= \delta_1(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) + \delta_3(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4)\\ &= (\delta_1 + \delta_3)(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4) + \delta_1\mathcal{A}_3 + \delta_3\mathcal{A}_1\\ &= (\delta_1 + \delta_3)(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4) - (\delta_1\mathcal{A}_1 + \delta_3\mathcal{A}_3).\end{aligned}$$

En divisant par $\delta_1 + \delta_3 = \delta$, δ étant l'aire du quadrilatère, et en posant

$$(1) \qquad \delta\mathcal{O} = \delta_1\mathcal{A}_1 + \delta_3\mathcal{A}_3,$$

on obtient

$$(2) \qquad 3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}.$$

Si l'on divise le quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ par la diagonale $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ en les deux triangles $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ dont les aires soient δ_2 et δ_4, dans les formules précédentes les indices 1 et 3 se changent en 2 et 4. Par ce changement, ni $\mathcal{G}$, ni l'expression $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$

ne changent. Par conséquent, et comme on a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 = \delta$, la formule (1) prend la forme

$$(3) \qquad \delta\mathcal{O} = \delta_2 \mathcal{A}_2 + \delta_4 \mathcal{A}_4 \quad (^1).$$

Or la formule (1) exprime (définition 2°) que $\mathcal{O}$ est situé sur la diagonale $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$; de même la formule (3) exprime que $\mathcal{O}$ est situé sur la diagonale $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$; donc $\mathcal{O}$ est le point d'intersection des deux diagonales $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ du quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$. En résumé :

I. *Si l'on désigne par* $\mathcal{G}$ *le centre de gravité d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ *et par* $\mathcal{O}$ *le point d'intersection des deux diagonales* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$, *le point* $\mathcal{G}$ *s'exprime par la formule* (²)

$$(2) \qquad 3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}.$$

3. Pour construire cette formule, je vais étudier l'expression $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$.

Si l'on pose

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathfrak{M}_{12}, & \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 2\mathfrak{M}_{34}, \\ \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2\mathfrak{M}_{23}, & \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 = 2\mathfrak{M}_{41}, \end{cases}$$

et

$$(5) \qquad \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 = 2\mathfrak{M}_{13}, \qquad \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 = 2\mathfrak{M}_{24},$$

les points $\mathfrak{M}_{12}$, $\mathfrak{M}_{13}$, ... représentent les milieux des

---

(¹) Des formules (1) et (3) on déduit immédiatement l'identité

$$\delta_1\mathcal{A}_1 - \delta_2\mathcal{A}_2 + \delta_3\mathcal{A}_3 - \delta_4\mathcal{A}_4 = 0,$$

qui met en évidence qu'il y a entre quatre points quelconques d'un plan une relation linéaire dont les coefficients $\delta_1, \ldots, \delta_4$, égaux respectivement aux aires des triangles $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4, \ldots, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, sont liés par l'égalité

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = 0.$$

(²) *Voir* la Note de M. NOEGGERATH. *Archives de Grunert-Hoppe*, 1re série, t. LXV, p. 209; 1880.

côtés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, ... (définition 1'). Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 &= 2(\mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{34}) \\ &= 2(\mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{41}) \\ &= 2(\mathcal{M}_{13} + \mathcal{M}_{24}). \end{aligned}$$

En introduisant de plus le milieu $\mathcal{M}$ du segment $\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{34}$, on obtient

$$\mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{34} = 2\mathcal{M}$$

et, par conséquent,

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 &= 4\mathcal{M} \\ &= 2(\mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{34}) \\ &= 2(\mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{41}) \\ &= 2(\mathcal{M}_{13} + \mathcal{M}_{24}); \end{aligned}$$

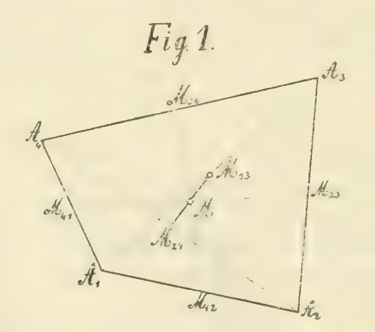
donc la formule (2) devient

$$(2^*) \qquad 3\mathcal{G} = 4\mathcal{M} - \mathcal{O}.$$

4. En donnant au point $\mathcal{M}$, défini par les formules (6) le nom de *point moyen* du quadrilatère, on tire des formules (6) la construction suivante :

II. *Construction du point moyen d'un quadrilatère* (*fig.* 1). — *Si l'on désigne par* $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{34}$; $\mathcal{M}_{23}$, $\mathcal{M}_{41}$

Fig. 1.



les milieux des côtés opposés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$; $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1$ *d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ *et par* $\mathcal{M}_{13}$, $\mathcal{M}_{24}$

les milieux des deux diagonales $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$, *les trois segments* $\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{34}$, $\mathcal{M}_{23}\mathcal{M}_{41}$, $\mathcal{M}_{13}\mathcal{M}_{24}$ *possèdent le même milieu* $\mathcal{M}$ *qui est le point moyen du quadrilatère.*

5. Ceci établi, la formule (2*) exprime (définition 2°) que le centre de gravité $\mathcal{G}$, le point moyen $\mathcal{M}$ et le point d'intersection $\mathcal{O}$ des deux diagonales d'un quadrilatère sont situés sur la même droite. Comme de plus la formule (2*) se change immédiatement en

$$3(\mathcal{G} - \mathcal{M}) = \mathcal{M} - \mathcal{O},$$

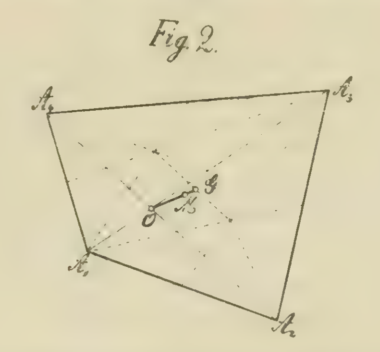
d'où suit

$$3\mathcal{M}\mathcal{G} = \mathcal{O}\mathcal{M},$$

on obtient :

III. *Première construction du centre de gravité* (¹) (*fig.* 2). — *Dans un quadrilatère quelconque soit* $\mathcal{O}$

Fig. 2.



le point d'intersection des deux diagonales et $\mathcal{M}$ *le point moyen; en joignant les points* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{M}$ *par une droite et en faisant* $\mathcal{M}\mathcal{G} = \frac{1}{3}\mathcal{O}\mathcal{M}$, *le point* $\mathcal{G}$ *sera le centre de gravité du quadrilatère.*

(¹) *Voir* les Notes de M. Stoll (*Archives de Grunert-Hoppe*, 1re série, t. LXV, p. 445; 1880; 2e série, t. I, p. 334; 1884; *Hoffmann's Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht*, t. XIII, p. 119; 1882).

6. Au moyen des formules (4), la formule (2) prend la forme

$$\begin{aligned} 3\mathcal{G} &= 2\mathcal{M}_{12} - \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 + \mathcal{O} \\ &= 2\mathcal{M}_{23} - \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1 + \mathcal{O}. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{12}, & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{34}, \\ \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{23}, & \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{41} \end{cases}$$

et

$$(8)\quad \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{13}, \qquad \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathcal{M}'_{24},$$

on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} 3\mathcal{G} = 2\mathcal{M}_{12} - \mathcal{M}'_{12} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathcal{M}_{23} - \mathcal{M}'_{23} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathcal{M}_{34} - \mathcal{M}'_{34} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathcal{M}_{41} - \mathcal{M}'_{41}; \end{cases}$$

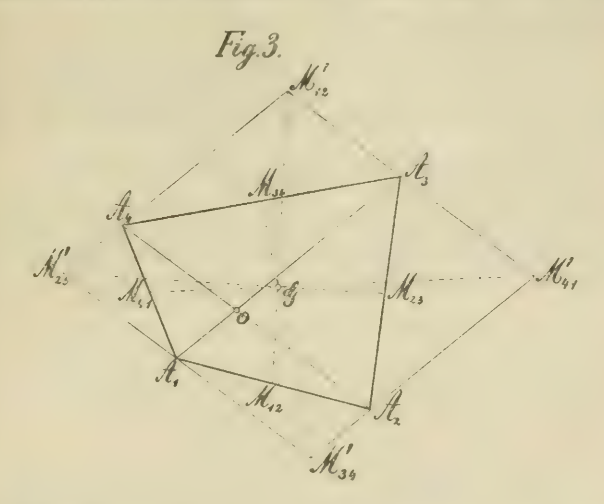
et

$$(10)\quad \begin{cases} 3\mathcal{G} = 2\mathcal{M}_{13} - \mathcal{M}'_{13} \\ \phantom{3\mathcal{G}} = 2\mathcal{M}_{24} - \mathcal{M}'_{24}. \end{cases}$$

D'après la construction qui découle de la définition 5°, le point $\mathcal{M}'_{12}$ est le quatrième sommet d'un parallélogramme dont $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{O}$ sont les trois autres sommets. Comme $\mathcal{M}'_{12}$ est opposé à $\mathcal{O}$, on obtient le point $\mathcal{M}'_{12}$ en menant par $\mathcal{A}_3$ une parallèle à $\mathcal{O}\mathcal{A}_4$ et par $\mathcal{A}_4$ une parallèle à $\mathcal{O}\mathcal{A}_3$. Or, le point $\mathcal{O}$ est situé sur les deux diagonales $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$; par conséquent $\mathcal{M}'_{12}$ est le point d'intersection des deux parallèles, menées respectivement par $\mathcal{A}_3$ à $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ et par $\mathcal{A}_4$ à $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$. Donc les formules (7) fournissent :

IV. *Construction des points* $\mathcal{M}'_{12}$, $\mathcal{M}'_{23}$, $\mathcal{M}'_{34}$, $\mathcal{M}'_{41}$ (*fig.* 3). — *Si l'on mène par les sommets opposés* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_3$ *d'un quadrilatère* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ *deux parallèles à la diagonale* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *et par les deux autres sommets*

opposés $\mathcal{A}_2$ *et* $\mathcal{A}_4$ *deux autres parallèles à la diagonale* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, *on obtient un parallélogramme dont*



$\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}'_{34}$, $\mathfrak{M}'_{41}$ *sont les sommets, et où le point* $\mathfrak{M}'_{12}$ *est le point d'intersection des parallèles, menées par* $\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_4$, *etc.*

7. Comme les formules (9) prennent aussi la forme

$$2(\mathcal{G} - \mathfrak{M}_{12}) = \mathfrak{M}'_{12} - \mathcal{G}, \qquad \ldots$$

d'où suit

$$2\,\mathfrak{M}_{12}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathfrak{M}'_{12}, \qquad \ldots,$$

on a :

V. *Deuxième et troisième constructions du centre de gravité* (¹) (*fig.* 3). — *Le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des quatre segments* $\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}_{23}\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}_{34}\mathfrak{M}'_{34}$, $\mathfrak{M}_{41}\mathfrak{M}'_{41}$.

(¹) *Voir* Edmond Henry : *Sur l'extension au quadrilatère d'une propriété analogue à celle des médianes d'un triangle* (*Revue scientifique*, t. XLVII, p. 731; 1891).

Le point $\mathcal{G}$ divise chacun de ces quatre segments dans le rapport 1 : 2, *de façon que* $\mathfrak{M}_{12}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}_{23}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{23}$, *etc.*

8. Les points $\mathfrak{M}'_{13}$ et $\mathfrak{M}'_{24}$, définis par les formules (8), se construisent encore plus facilement que les points $\mathfrak{M}'_{12}, \ldots, \mathfrak{M}'_{41}$.

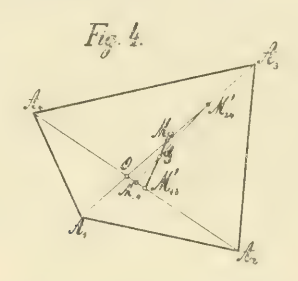
Comme le point $\mathcal{O}$ est situé sur $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$, la première formule (8) $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}$ exprime que le point $\mathfrak{M}'_{13}$ a la même distance du point $\mathcal{A}_2$ que le point $\mathcal{O}$ du point $\mathcal{A}_4$. De même, la seconde formule (8)

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}$$

exprime que $\mathfrak{M}'_{24}\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1\mathcal{O}$. Au moyen des points $\mathfrak{M}'_{13}$ et $\mathfrak{M}'_{24}$, des formules (10) résulte :

VI. *Quatrième et cinquième constructions du centre de gravité* [1] (*fig.* 4). — *Soit, dans un quadrilatère*

Fig. 4.



$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, $\mathcal{O}$ *le point d'intersection des deux diagonales* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *dont* $\mathfrak{M}_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}$ *sont les milieux. Si l'on construit sur la diagonale* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ *le point* $\mathfrak{M}'_{24}$, *et sur la diagonale* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$ *le point* $\mathfrak{M}'_{13}$, *de façon que* $\mathcal{A}_1\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}\mathcal{A}_3$ *et* $\mathcal{A}_4\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}\mathcal{A}_2$, *le*

(1) *Voir*, par exemple, Ch. Delaunay, *Traité de Mécanique rationnelle*. Paris, 1878; 6e édit., p. 275.

centre de gravité $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des deux segments* $\mathfrak{M}_{13}\mathfrak{M}'_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}\mathfrak{M}'_{24}$.

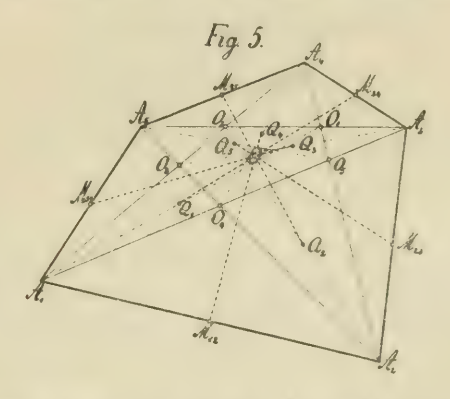
Le point $\mathcal{G}$ *divise chacun de ces deux segments dans le rapport* 1 : 2, *de façon que* $\mathfrak{M}_{13}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{13}$ *et* $\mathfrak{M}_{24}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{24}$.

B. *Centre de gravité d'un pentagone.*

9. Le centre de gravité d'un pentagone se calcule et se construit de la même manière que le centre de gravité d'un quadrilatère.

Le pentagone quelconque $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ (*fig.* 5) soit divisé par la diagonale $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$ en le quadrilatère

Fig. 5.



$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ et en le triangle $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ dont les aires soient respectivement Δ_5 et Δ_{23}.

D'après la formule (2) le centre de gravité du quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ s'exprime par

$$\tfrac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}_5),$$

$\mathcal{O}_5$ étant le point d'intersection des deux diagonales $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4$. Comme, de plus, le centre de gravité du triangle $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ est représenté par $\frac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5)$,

le centre de gravité du pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ est exprimé par la formule

$$\begin{aligned}3(\Delta_5 + \Delta_{23})\mathcal{G} &= \Delta_5(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - \mathcal{O}_5) \\ &\quad + \Delta_{23}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5) \\ &= (\Delta_5 + \Delta_{23})(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5) \\ &\quad - \{\Delta_5(\mathcal{A}_5 + \mathcal{O}_5) + \Delta_{23}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)\}.\end{aligned}$$

En posant, d'après la formule (4),

$$\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2\mathcal{M}_{23}$$

et, de même,

$$\mathcal{A}_5 + \mathcal{O}_5 = 2\mathcal{Q}_5.$$

$\mathcal{Q}_5$ étant le milieu du segment $\mathcal{A}_5\mathcal{O}_5$, l'expression

$$\Delta_5(\mathcal{A}_5 + \mathcal{O}_5) + \Delta_{23}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)$$

devient

$$2(\Delta_5\mathcal{Q}_5 + \Delta_{23}\mathcal{M}_{23}).$$

Si l'on définit le point $\mathcal{O}$, par l'égalité

$$(11)\qquad (\Delta_5 + \Delta_{23})\mathcal{O} = \Delta_5\mathcal{Q}_5 + \Delta_{23}\mathcal{M}_{23},$$

et si l'on divise l'expression de $\mathcal{G}$ par $\Delta_5 + \Delta_{23} = \Delta$, Δ étant l'aire du pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$, on obtient

$$(12)\qquad 3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O}.$$

10. En divisant le pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ par une autre diagonale que $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$, savoir $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_5\mathcal{A}_3$, ni $\mathcal{G}$, ni $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5$ ne changent; par conséquent, l'expression de $\mathcal{O}$, définie par l'égalité (11), reste la même, si l'on y change, d'une façon cyclique, les indices inférieurs. Or la formule (11) met en évidence que le point $\mathcal{O}$ est situé sur la droite $\mathcal{Q}_5\mathcal{M}_{23}$; donc ce point est situé aussi sur les droites $\mathcal{Q}_1\mathcal{M}_{34}$, $\mathcal{Q}_2\mathcal{M}_{45}$, $\mathcal{Q}_3\mathcal{M}_{51}$, $\mathcal{Q}_4\mathcal{M}_{12}$. D'où résulte :

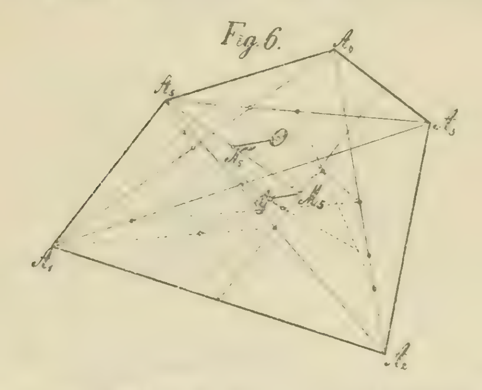
VII. *Si l'on désigne (fig. 5) par*

$$\mathcal{O}_1; \quad \mathcal{O}_2; \quad \mathcal{O}_3; \quad \mathcal{O}_4; \quad \mathcal{O}_5;$$

les points d'intersection des diagonales

$$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3\mathcal{A}_5; \quad \mathcal{A}_3\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4\mathcal{A}_1; \quad \mathcal{A}_4\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_5\mathcal{A}_2; \quad \mathcal{A}_5\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3; \quad \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_4;$$

par $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_5$ *les milieux des segments* $\mathcal{A}_1\mathcal{O}_1, \mathcal{A}_2\mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{O}_5$; *par* $\mathcal{M}_{12}, \mathcal{M}_{23}, \ldots, \mathcal{M}_{51}$ *les mi-*


Fig. 6.

lieux des côtés $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$, *les cinq segments* $\mathcal{Q}_1\mathcal{M}_{34}, \mathcal{Q}_2\mathcal{M}_{45}, \ldots, \mathcal{Q}_5\mathcal{M}_{23}$ *ont le même point d'intersection* $\mathcal{O}$.

VIII. *Au moyen de ce point* $\mathcal{O}$, *le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *d'un pentagone quelconque* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ *s'exprime par la formule*

(12) $$3\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O}.$$

11. Pour construire cette expression, je rappelle que l'on a, d'après la formule (6)

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 4\mathcal{M}_5.$$

$\mathcal{M}_5$ étant le point moyen du quadrilatère $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$. Par conséquent, la formule (12) devient

$$3\mathcal{G} = 4\mathcal{M}_5 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O}.$$

Si l'on pose

$$\mathcal{M}_5 + \mathcal{A}_5 = 2\mathcal{N}_5,$$

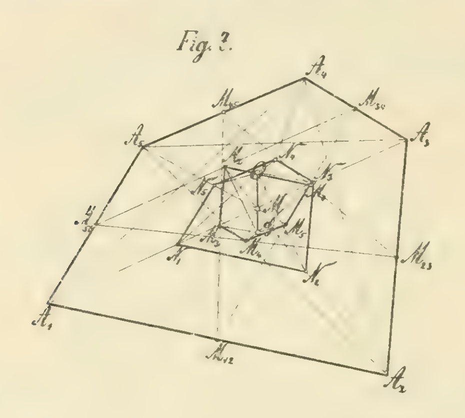
on en tire

$$3(\mathcal{G} - \mathcal{M}_5) = 2(\mathcal{N}_5 - \mathcal{O}).$$

De là résultent les constructions suivantes :

Première et deuxième constructions du centre de gravité d'un pentagone (voir *fig.* 6 *et fig.* 7).

Fig. 7.



IX. ***Soient*** $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_5$ ***les points moyens des quadrilatères*** $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$, $\ldots$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, *en lesquels les diagonales* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $\ldots$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$ *partagent le pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$; *soient, de plus,* $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\ldots$, $\mathcal{N}_5$ *les milieux des segments* $\mathcal{A}_1\mathcal{M}_1$, $\mathcal{A}_2\mathcal{M}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}_5\mathcal{M}_5$; *soit enfin* $\mathcal{O}$ *le point défini par le théorème VII :*

Si l'on mène par les points $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_5$ ***des parallèles aux segments*** $\mathcal{O}\mathcal{N}_1$, $\mathcal{O}\mathcal{N}_2$, $\ldots$, $\mathcal{O}\mathcal{N}_5$, ***les cinq parallèles concourent en le même point*** $\mathcal{G}$, ***centre de gravité du pentagone.***

X. *Le point* $\mathcal{G}$ *est situé sur chacune de ces cinq parallèles, de façon que*

$$\mathcal{M}_i\mathcal{G} = \tfrac{2}{3}\,\mathcal{O}\mathcal{N}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

12. Comme on a

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 \\ = 4\mathcal{M}_i + \mathcal{A}_i = 3\mathcal{M}_i + 2\mathcal{N}_i = 5\mathcal{M} \\ (i = 1, 2, 3, 4, 5), \end{gathered}$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned} 4\mathcal{M}_i + \mathcal{A}_i &= 4\mathcal{M}_k + \mathcal{A}_k \\ 3\mathcal{M}_i + 2\mathcal{N}_i &= 3\mathcal{M}_k + 2\mathcal{N}_k \end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2, 3, 4, 5);$$

par conséquent,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} 4(\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_k) &= \mathcal{A}_k - \mathcal{A}_i, \\ 3(\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_k) &= 2(\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i). \end{aligned}\right.$$

Donc on a les théorèmes suivants (*fig.* 7) :

XI. *Les points moyens* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_5$ *des quadrilatères* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$, *en lesquels les diagonales* $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_1\mathcal{A}_4$ *partagent le pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5$ *forment un pentagone* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3\mathcal{M}_4\mathcal{M}_5$ *dont les côtés* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3, \ldots, \mathcal{M}_5\mathcal{M}_1$ *sont parallèles et de sens opposé aux côtés* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$.

Le rapport de $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 : \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 : \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, *etc. est égal à* $1 : 4$.

XII. *De même les points* $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_5$, *milieux des segments* $\mathcal{A}_1\mathcal{M}_1, \mathcal{A}_2\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{A}_5\mathcal{M}_5$, *forment un autre pentagone* $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3\mathcal{N}_4\mathcal{N}_5$ *dont les côtés sont eux-mêmes parallèles, dans le même sens, aux côtés du pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\ldots\mathcal{A}_5$ *et parallèles, mais de sens opposé, à ceux du pentagone* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\ldots\mathcal{M}_5$.

Le rapport de $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 : \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3 : \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3, \ldots$

est égal à 3 : 2 *et le rapport de* $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 : \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_3 : \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, ... *est égal à* 3 : 8.

XIII. ***Les cinq droites*** $\mathcal{A}_i\mathcal{M}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ***concourent en le même point***

$$\mathcal{M} = \tfrac{1}{5}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5),$$

point moyen du pentagone $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_5$.

XIV. *Le point moyen* $\mathcal{M}$ *est le centre de similitude des pentagones* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_5$; $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 \ldots \mathcal{M}_5$; $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 \ldots \mathcal{N}_5$.

13. Au moyen du point $\mathcal{M}$, la formule (12) devient

$$(12^*) \qquad 3\mathcal{G} = 5\mathcal{M} - 2\mathcal{O}.$$

De cette expression, tout à fait analogue à l'expression (2^*) pour le quadrilatère, on déduit

$$3(\mathcal{G} - \mathcal{M}) = 2(\mathcal{M} - \mathcal{O})$$

et, par conséquent,

$$3\mathcal{M}\mathcal{G} = 2\mathcal{O}\mathcal{M}.$$

Donc on obtient :

XV. *Troisième construction du centre de gravité d'un pentagone* (*fig.* 7).

Dans un pentagone quelconque, soient $\mathcal{O}$ *le point défini par le théorème VII,* $\mathcal{M}$ *le point moyen défini par le théorème XIII; en joignant les points* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{M}$ *par une droite et en faisant* $\mathcal{M}\mathcal{G} = \frac{2}{3}\mathcal{O}\mathcal{M}$, *le point* $\mathcal{G}$ *sera le centre de gravité du pentagone.*

14. Si l'on pose

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{M}_{12}, & \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{12}, \\ \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2\mathcal{M}_{23}, & \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{23}, \\ \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 2\mathcal{M}_{34}, & \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{34}, \\ \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 = 2\mathcal{M}_{45}, & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{45}, \\ \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 = 2\mathcal{M}_{51}, & \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - 2\mathcal{O} = \mathcal{M}'_{51} \end{array} \right.$$

et, d'une façon analogue,

$$
(15)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 = 2\mathfrak{M}_{13}, & \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{13}, \\
\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4 = 2\mathfrak{M}_{24}, & \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{24}, \\
\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_5 = 2\mathfrak{M}_{35}, & \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{35}, \\
\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_1 = 2\mathfrak{M}_{41}, & \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{41}, \\
\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_2 = 2\mathfrak{M}_{52}, & \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{52};
\end{array}
\right.
$$

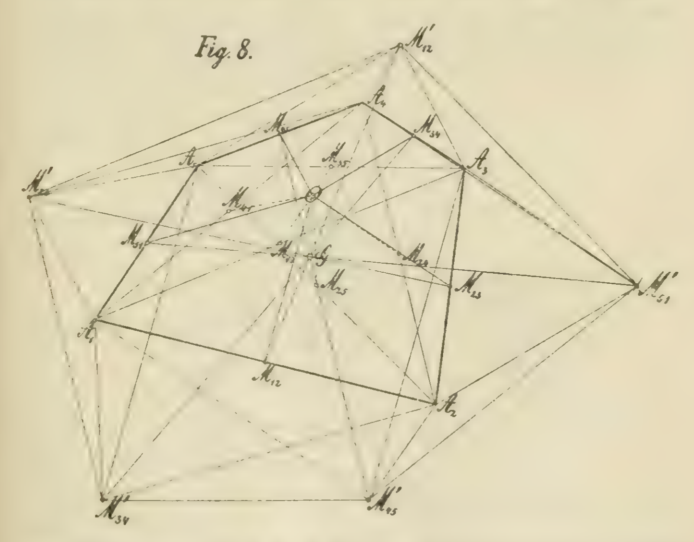
la formule (12) se change en l'égalité

$$
(16)\qquad 3\mathcal{G} = 2\mathfrak{M}_{ik} - \mathfrak{M}'_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k),
$$

qui représente dix formules différentes.

15. Pour construire les points $\mathfrak{M}'_{12}, \mathfrak{M}'_{23}, \ldots, \mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}, \mathfrak{M}'_{24}, \ldots, \mathfrak{M}'_{52}$, je fais remarquer que les formules (14) et (15) prennent la forme commune

$$
(17)\quad \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_k = 2\mathfrak{M}_{ik}, \qquad \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{ik}.
$$



où les cinq indices i, k, l, m, n désignent, dans un ordre quelconque, les cinq indices 1, 2, 3, 4, 5.

Comme des expressions (17) découle immédiatement

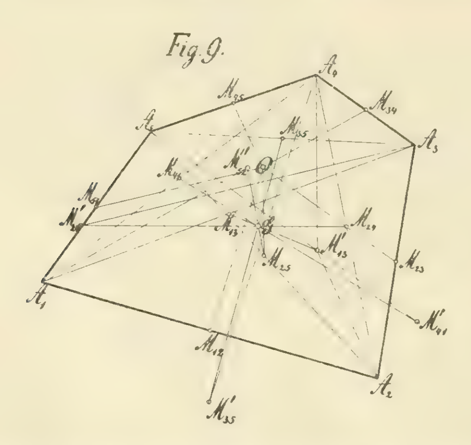
$$(18)\quad \begin{cases} 2(\mathfrak{M}_{mn} - \mathcal{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathcal{A}_l, \\ 2(\mathfrak{M}_{nl} - \mathcal{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathcal{A}_m, \\ 2(\mathfrak{M}_{lm} - \mathcal{O}) = \mathfrak{M}'_{ik} - \mathcal{A}_n, \end{cases}$$

on a :

Deux constructions des points $\mathfrak{M}'_{12}, \mathfrak{M}'_{23}, \ldots, \mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}, \mathfrak{M}'_{24}, \ldots, \mathfrak{M}'_{52}$ (voir *fig.* 7 et *fig.* 8).

XVI. *Soient i, k, l, m, n cinq indices différents, désignant, dans un ordre quelconque, les indices* 1, 2, 3, 4, 5; *soient, de plus,* $\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathfrak{M}_{lm}$ *les milieux des côtés* $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_l\mathcal{A}_m$ *du pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\ldots\mathcal{A}_5$; *soit enfin* $\mathcal{O}$ *le point défini par le théorème VII: Si l'on mène par les sommets* $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_n$ *du pentagone des parallèles respectivement aux segments* $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{lm}$, *ces parallèles concourent au point* $\mathfrak{M}'_{ik}$.

XVII. *Le point* $\mathfrak{M}'_{ik}$ *est situé sur ces parallèles de*



façon que $\mathcal{A}_l\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathcal{O}\mathfrak{M}_{mn}$, $\mathcal{A}_m\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathcal{O}\mathfrak{M}_{nl}$, $\mathcal{A}_n\mathfrak{M}'_{ik} = 2\,\mathcal{O}\mathfrak{M}_{lm}$.

Pour $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$, $n = 5$, la *fig.* 8 et, pour $i = 1$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$, $n = 5$, la *fig.* 9 montrent les constructions précédentes.

Dans la *fig.* 8, par les sommets $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, des parallèles sont menées respectivement aux segments $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{45}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{35}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{34}$; leur point d'intersection est le point $\mathfrak{M}'_{12}$. De plus on voit que $\mathcal{A}_3\mathfrak{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{45}$, $\mathcal{A}_4\mathfrak{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{35}$, $\mathcal{A}_5\mathfrak{M}'_{12} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{34}$.

De même, dans la *fig.* 9, par les sommets $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, des parallèles sont menées respectivement aux segments $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{45}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{25}$, $\mathcal{O}\mathfrak{M}_{24}$; leur point d'intersection est le point $\mathfrak{M}'_{13}$. De plus on voit que

$$\mathcal{A}_2\mathfrak{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{45}, \qquad \mathcal{A}_4\mathfrak{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{25}, \\ \mathcal{A}_5\mathfrak{M}'_{13} = 2\mathcal{O}\mathfrak{M}_{24}.$$

16. Les points $\mathfrak{M}'_{12}$, $\mathfrak{M}'_{23}$, ..., $\mathfrak{M}'_{51}$; $\mathfrak{M}'_{13}$, $\mathfrak{M}'_{24}$, ..., $\mathfrak{M}'_{52}$ sont liés aux points $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_5$ par de simples relations qui ramènent leur construction à la construction d'un seul point d'entre eux.

En effet, si l'on échange, dans la formule (17)

$$\mathcal{A}_l + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{ik}$$

les indices k et l, on obtient

$$\mathcal{A}_k + \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n - 2\mathcal{O} = \mathfrak{M}'_{il},$$

et, par soustraction,

$$(19) \qquad \mathfrak{M}'_{ik} - \mathfrak{M}'_{il} = \mathcal{A}_l - \mathcal{A}_k,$$

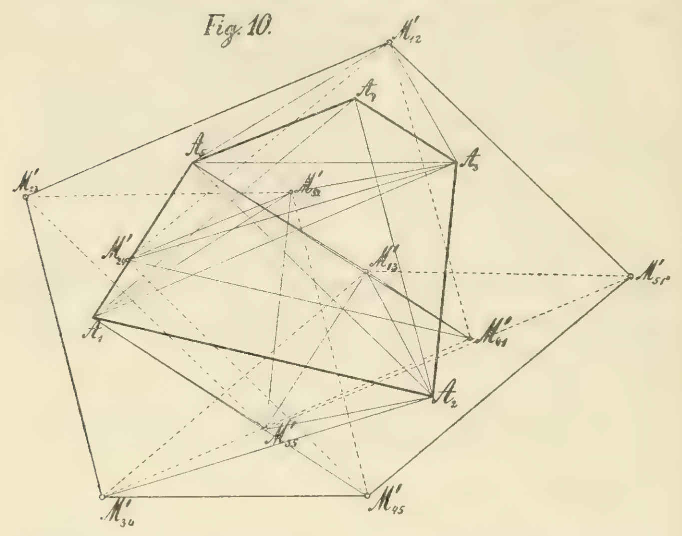
d'où il suit que les segments $\mathfrak{M}'_{il}\mathfrak{M}'_{ik}$ sont parallèles et égaux aux segments $\mathcal{A}_k\mathcal{A}_l$.

Par conséquent on obtient comme corollaires les deux théorèmes :

XVIII. *Dans le pentagone* $\mathfrak{M}'_{12}\mathfrak{M}'_{23}\mathfrak{M}'_{34}\mathfrak{M}'_{45}\mathfrak{M}'_{51}$ (*fig.* 10), *les côtés* $\mathfrak{M}'_{12}\mathfrak{M}'_{23}$, $\mathfrak{M}'_{23}\mathfrak{M}'_{34}$, ..., $\mathfrak{M}'_{51}\mathfrak{M}'_{12}$

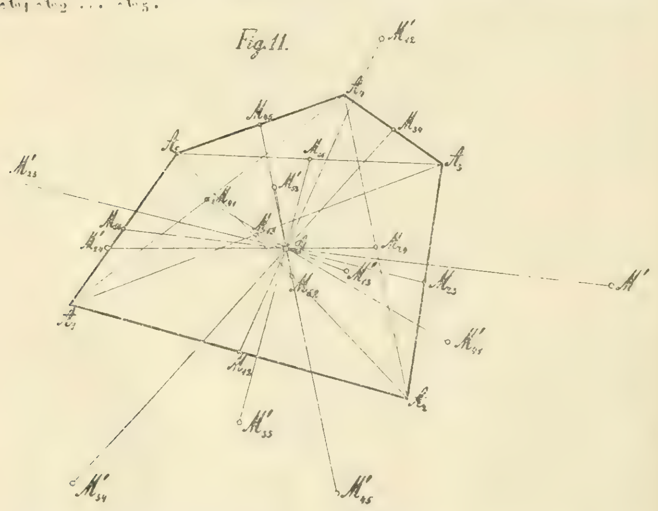
sont égaux et parallèles respectivement aux diago-

Fig. 10.



nales $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5$ *du pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\ldots\mathcal{A}_5$.

Fig. 11.



XIX. *Dans le pentagone* $\mathcal{M}'_{13}\mathcal{M}'_{24}\mathcal{M}'_{35}\mathcal{M}'_{41}\mathcal{M}'_{52}$

(*fig.* 11), *les diagonales* $\mathcal{M}'_{24}\mathcal{M}'_{41}$, $\mathcal{M}'_{35}\mathcal{M}'_{52}$, $\ldots$, $\mathcal{M}'_{13}\mathcal{M}'_{35}$ *sont égales et parallèles respectivement aux côtés* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, $\ldots$, $\mathcal{A}_5\mathcal{A}_1$ *du pentagone* $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\ldots\mathcal{A}_5$.

D'après la formule (19) on a aussi

$$(20)\qquad \mathcal{M}'_{ik} - \mathcal{M}'_{im} = \mathcal{M}'_{lk} - \mathcal{M}'_{lm} = \mathcal{A}_m - \mathcal{A}_k,$$

et comme $\mathcal{M}'_{lk} = \mathcal{M}'_{kl}$, $\mathcal{M}'_{im} = \mathcal{M}'_{mi}$, on obtient :

XX. *Si l'on désigne par* i, k, l, m *quatre indices quelconques parmi les cinq indices* 1, 2, 3, 4, 5, *les quatre points*

$$\mathcal{M}'_{ik},\quad \mathcal{M}'_{kl},\quad \mathcal{M}'_{lm},\quad \mathcal{M}'_{mi}$$

forment les quatre sommets d'un parallélogramme.

Donc :

XXI. *Si parmi les dix points* $\mathcal{M}'_{ik}\,(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$ *un seul est donné, les autres se construisent au moyen des parallélogrammes.*

Comme la formule (20) prend aussi la forme

$$(21)\qquad \mathcal{M}'_{ik} - \mathcal{A}_m = \mathcal{M}'_{im} - \mathcal{A}_k,$$

on a :

XXII. *Les segments*

$$\mathcal{A}_m\mathcal{M}'_{ik} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_k\mathcal{M}'_{im} \qquad (i, k, m = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k \neq m)$$

formés par les sommets des pentagones $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\ldots\mathcal{A}_5$; $\mathcal{M}'_{12}\mathcal{M}'_{23}\ldots\mathcal{M}'_{51}$; $\mathcal{M}'_{13}\mathcal{M}'_{24}, \ldots, \mathcal{M}'_{52}$ *sont égaux et parallèles.*

17. Dans la *fig.* 10, sont illustrées quelques-unes des propriétés, établies par les théorèmes XX, XXI, XXII.

En effet, la *fig.* 10 met en évidence :

1° Que les sommets

$\mathcal{M}'_{12}\mathcal{M}'_{24}\mathcal{M}'_{45}\mathcal{M}'_{51}$; $\mathcal{M}'_{23}\mathcal{M}'_{34}\mathcal{M}'_{45}\mathcal{M}'_{52}$;

$\mathcal{M}'_{13}\mathcal{M}'_{34}\mathcal{M}'_{45}\mathcal{M}'_{51}$; $\mathcal{M}'_{23}\mathcal{M}'_{35}\mathcal{M}'_{51}\mathcal{M}'_{12}$;

. . . .

forment des parallélogrammes;

2° Que les segments (côtés ou diagonales)

$\mathcal{M}'_{13}\mathcal{M}'_{23}$, $\mathcal{M}'_{41}\mathcal{M}'_{24}$, $\mathcal{M}'_{51}\mathcal{M}'_{52}$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$;

$\mathcal{M}'_{24}\mathcal{M}'_{34}$, $\mathcal{M}'_{52}\mathcal{M}'_{35}$, $\mathcal{M}'_{12}\mathcal{M}'_{13}$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$;

. . . .

$\mathcal{M}'_{23}\mathcal{M}'_{12}$, $\mathcal{M}'_{34}\mathcal{M}'_{41}$, $\mathcal{M}'_{35}\mathcal{M}'_{51}$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$;

. . . .

sont égaux et parallèles;

3° Que les segments

$\mathcal{A}_2\mathcal{M}'_{34}$, $\mathcal{A}_3\mathcal{M}'_{24}$; $\mathcal{A}_2\mathcal{M}'_{13}$, $\mathcal{A}_3\mathcal{M}'_{12}$; $\mathcal{A}_2\mathcal{M}'_{35}$, $\mathcal{A}_3\mathcal{M}'_{52}$;

$\mathcal{A}_1\mathcal{M}'_{52}$, $\mathcal{A}_5\mathcal{M}'_{12}$; $\mathcal{A}_1\mathcal{M}'_{35}$, $\mathcal{A}_5\mathcal{M}'_{13}$; $\mathcal{A}_1\mathcal{M}'_{45}$, $\mathcal{A}_5\mathcal{M}'_{41}$;

. . . .

sont égaux et parallèles.

18. Après avoir construit les points $\mathcal{M}'_{ik}$, on déduit de la formule (16) :

Quatrième et cinquième constructions du centre de gravité d'un pentagone [1] (*fig.* 11).

XXIII. *Le centre de gravité* $\mathcal{G}$ *est le point d'intersection des dix segments* $\mathcal{M}_{ik}\mathcal{M}'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

---

[1] *Voir* la Note de M. J. Gysel : *Sur la construction du centre de gravité d'un polygone plan homogène* (*Archives des Sciences physiques et naturelles*, 3ᵉ période, t. XXXII, p. 275; Genève, 1894); ainsi que le Mémoire du même auteur : *Zur Konstruktion des Schwerpunktes einer ebenen Vielecksfläche*. Beilage zum *Jahresbericht des Gymnasiums Schaffhausen für* 1894-1895.

XXIV. *Le point $\mathcal{G}$ divise les dix segments $\mathfrak{M}_{ik}\mathfrak{M}'_{ik}$ dans le rapport* 1 : 2, *de façon que* $\mathfrak{M}_{ik}\mathcal{G} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\mathfrak{M}'_{ik}$.

En terminant cet article, relatif aux *points*, je fais encore remarquer que les points $\mathcal{O}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$, $\mathcal{Q}_i$, $\mathfrak{M}_{ik}$, $\mathfrak{M}'_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5;\ i \neq k)$, $\mathcal{O}$, $\mathfrak{M}$, $\mathcal{G}$, introduits pour les différentes constructions du centre de gravité, sont liés par bien d'autres relations. Je laisse au lecteur le soin de les établir, à titre d'exemples. Je passerai, dans un deuxième Article, aux applications relatives aux *vecteurs*.

[C1b]

SUR LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE;

PAR M. D. SINTSOF,

Professeur agrégé à l'Université de Kasan.

Soit y une fonction algébrique déterminée par l'équation irréductible

$$(1) \qquad y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

dont les coefficients p_i sont des fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

Nous aurons alors facilement

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{10} + \alpha_{11} y + \ldots + \alpha_{1,n-1} y^{n-1}),$$

Δ étant la discriminante de (1) par rapport à y.

De même

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Delta^{-2}(\alpha_{20} + \alpha_{21} y + \ldots + \alpha_{2,n-1} y^{n-1}),$$

et, en général,

$$(3) \qquad \frac{d^p y}{dx^p} = \Delta^{-p}(\alpha_{p0} + \alpha_{p1} y + \ldots + \alpha_{p,n-1} y^{n-1})$$

Or je veux montrer que les fonctions rationnelles α_{ik} peuvent être exprimées explicitement à l'aide des p_i et de leurs dérivées successives.

En effet, employant le même artifice à l'aide duquel M. Raffy (¹) a démontré les formules de M. Liouville, je multiplie (2) par Δy^k et forme la somme des expressions pareilles pour $y = y_1, y_2, \ldots, y_n$, les y_i étant les racines différentes de (1).

Nous aurons

$$(4)\qquad \frac{1}{k+1}\Delta s'_{k+1} = \alpha_{10}s_k + \alpha_{11}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{1,n-1}s_{k+n-1},$$

si l'on désigne $s_k = \Sigma y_i^k$ la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (1).

Si l'on donne à k les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, on obtient n équations, qui, résolues par rapport à α_{1i}, en donnent la valeur sous forme de déterminant

$$(5)\qquad \alpha_{1i} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{i-1} & s'_1 & s_{i+1} & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_i & \frac{1}{2}s'_2 & s_{i+2} & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{n+i-2} & \frac{1}{n}s'_n & s_{n+i} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

De même, l'équation (3), multipliée par $\Delta^p y^k$, nous donne, à l'aide de l'égalité

$$y^k y^{(p+1)} = \frac{d}{dx}(y^k y^{(p)}) - k y^{k-1} y' y^{(p)}$$

la relation suivante

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_{p+1,0}s_k + \alpha_{p+1,1}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{p+1,n-1}s_{k+n-1} \\ &\quad = \Delta^{p+1}\frac{d}{dx}\left[\Delta^{-p}(\alpha_{p,0}s_k + \alpha_{p,1}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{p,n-1}s_{n+k-1})\right] \\ &\quad - \Delta\left(\alpha_{p,0}s'_k + \frac{k}{k+1}\alpha_{p,1}s'_{k+1} + \ldots + \frac{k}{k+n-1}\alpha_{p,n-1}s'_{k+n-1}\right). \end{aligned}\right.$$

(¹) *Sur les quadratures algébriques et logarithmiques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3ᵉ série, t. II, p. 184-206; 1883).

En donnant à k les valeurs, 0, 1, 2, ... $n-1$ nous obtenons n équations qui déterminent les $\alpha_{p+1,i}$ à l'aide des s_j, s'_j et les $\alpha_{p,k}$. Si donc les $\alpha_{p,k}$ sont connus nous aurons $\alpha_{p+1,j}$. Mais nous avons déterminé les $\alpha_{1,k}$: donc (6) nous donnera les $\alpha_{2,k}$, et ainsi de suite.

On peut remarquer que pour $p=1$ l'expression (6) se simplifie; notamment le premier membre de la seconde partie contient sous le signe de différentiation la quantité $\frac{1}{k+1}\,s'_{k+1}$; quant au second membre, il se présente sous forme d'un déterminant.

Mais je n'insiste plus sur ces détails (¹).

[L²1a]

SUR LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES QUADRIQUES (²);

Par M. L. RIPERT,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit l'équation générale cartésienne

$$(Q)\quad \begin{cases} F(X,Y,Z,T) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 \\ \qquad + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY \\ \qquad + 2CXT + 2C'YT + 2C''ZT + DT^2 = 0. \end{cases}$$

En désignant par H le discriminant de la fonction F, par a, a', ..., c'', d les mineurs du premier ordre de H correspondant respectivement à A, A', ..., C'', D, et

---

(¹) Cette note est extraite du Chap. III, § 29 du Mémoire *Sur les intégrales rationnelles des équations différentielles linéaires*, publié en russe dans les *Mémoires scientifiques de l'Université de Kasan*, livres IV-IX, 1898.

(²) Comparer avec l'article *Sur la discussion de l'équation des coniques*. (*N. A.*, p. 329; 1898.)

notamment

$$a'' = AA'D + 2C'CB'' - AC'^2 - A'C^2 - DB''^2,$$
$$d = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2;$$

posant

$$\alpha = A'A'' - B^2, \qquad \alpha' = A''A - B'^2, \qquad \alpha'' = AA' - B''^2,$$
$$\beta = B'B'' - AB, \qquad \beta' = B''B - A'B', \qquad \beta'' = BB' - A''B'',$$

d'où résulte

$$H = Dd - (\Sigma\alpha C^2 + 2\Sigma\beta C'C'');$$

posant enfin

$$AD - C^2 = \theta, \qquad A'D - C'^2 = \theta', \qquad A''D - C''^2 = \theta'',$$

il est aisé de démontrer par la décomposition en carrés de la fonction F ou de vérifier directement les identités suivantes :

1° Dans l'hypothèse $A\alpha''d \neq 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z - (AC' - B'C)T]^2}{\alpha''}$$
$$+ \frac{A(dZ - c''T)^2}{d\alpha''} + \frac{AH}{d}T^2;$$

2° Dans l'hypothèse $A\alpha'' \neq 0$, $d = 0$, qui entraîne $H\alpha'' - c''^2 = 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z - (AC' - B''C)T]^2}{\alpha''}$$
$$- 2\frac{Ac''}{\alpha''}ZT - \frac{Aa''}{\alpha''}T^2;$$

3° Dans l'hypothèse $A\alpha'' \neq 0$, $d = H = 0$, qui entraîne $c'' = 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + \frac{[\alpha''Y - \beta Z + (AC' - B''C)T]}{\alpha''} + \frac{Aa''}{\alpha''}T^2;$$

4° Dans l'hypothèse $A \neq 0$, $d = H = \alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$, $a'' = 0$

$$AF = \tfrac{1}{4}F_X'^2 + 2(AC' - B'C)YT + 2(AC'' - B'C)ZT + \theta T^2;$$

5° Enfin, dans l'hypothèse $A \neq 0$, avec

$$d = H = \alpha = \alpha' = \alpha'' = a = a' = a'' = 0$$

$$AF = \tfrac{1}{4} F'^2_X + 0\,T^2.$$

Dès lors, il est facile, en faisant sur chaque forme d'équation les hypothèses qu'elle comporte, de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *L'espèce d'une quadrique donnée par l'équation* (Q) *et sa situation, tant par rapport au plan de l'infini qu'à l'origine, sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant* (¹) :

I.	$Ad > 0,\ \alpha'' > 0$	$H > 0$	Quadrique imaginaire E_i.	IV.
		$H = 0$	Point (quadrique se réduisant au pôle du plan de l'infini).	
		$H < 0$	**Ellipsoïde réel E.**	
II.	$\frac{Ad}{d}\ \frac{\leqq 0,\ \alpha'' > 0}{\gtrless 0,\ \alpha'' < 0}$	$H < 0$	Hyperboloïde à deux nappes H_2.	
		$H = 0$	Cône (quadrique passant par le pôle du plan de l'infini).	
		$H > 0$	Hyperboloïde à une nappe H_1.	
III.	$d = 0$	$H < 0$	Paraboloïde elliptique P_e.	
		$H = 0$	(*Voir* le théor. I *bis* ci-après).	
		$H > 0$	Paraboloïde hyperbolique P_h.	

I. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une conique imaginaire.

II. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une conique réelle (ellipse dans le cas de α, α' *et* $\alpha'' > 0$, hyperbole ou parabole avec α, α' ou $\alpha'' < 0$).

III. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant deux droites concourantes (imaginaires pour P_e, réelles

(¹) On peut remplacer la combinaison $A\alpha''$ par l'une des suivantes : $A\alpha'$, $A'\alpha$, $A'\alpha''$, $A''\alpha$, $A''\alpha'$, à l'exclusion de $A\alpha$, $A'\alpha'$ ou $A''\alpha''$. D'ailleurs, I entraîne toujours A, A', A'' de mêmes signes et $\alpha, \alpha', \alpha''$ positifs. La combinaison ($Ad < 0$, $\alpha'' > 0$) n'est à considérer que lorsqu'on a en même temps $\alpha \leqq 0$, $\alpha' \leqq 0$.

pour P_h), en d'autres termes, quadriques tangentes au plan de l'infini.

IV. L'origine est extérieure, sur la quadrique, ou intérieure selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0.$$

Le cône asymptote a pour équation

$$F(X, Y, Z, T) - \frac{H}{d} T^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = c$, $y = c'$, $z = c''$, $t = d$. Le plan polaire de l'origine a pour équation

$$CX - C'Y + C''Z - DT = 0.$$

Toute quadrique ($H \gtrless 0$) a deux systèmes de génératrices rectilignes, imaginaires pour E, P_e, H_2 ($H < 0$), réels pour H_1 et P_h ($H > 0$).

Théorème I *bis*. — *Si l'on a* $d = H = 0$, *la quadrique* Q *est une variété cylindrique dont l'espèce et la situation sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :*

I.	$\alpha'' > 0$	$Aa' > 0$	Cylindre imaginaire.	IV.
		$a'' = 0$	Droite (cylindre-point).	
		$Aa'' < 0$	Cylindre elliptique réel.	
II.	$\alpha' < 0$	$a = 0$	Cylindre hyperbolique.	
		$a'' = 0$	Dièdre (cylindre-plans sécants).	
		a, a' ou $a'' \gtrless 0$	Cylindre parabolique.	
III.	$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$	$a = a' = a'' = 0$	b, b' ou $b'' > 0$: Plans parallèles imaginaires.	V.
			$b = b' = b'' = 0$: Plans parallèles confondus.	
			b, b' ou $b'' < 0$: Plans parallèles réels et distincts.	

I et II. Variétés respectives des paraboloïdes P_e et P_h, présentant les mêmes caractères de situation ;

$\alpha'' = AA' - B''^2$ et $a'' = D\alpha'' + 2B''CC' - AC'^2 - A'C^2$ doivent se correspondre ; si l'on a $\alpha'' = 0$, avec α ou $\alpha' \gtrless 0$, on opérera sur (α, a) ou (α', a'). La droite $(\alpha'' > 0,\ a'' = 0)$ est l'intersection de deux plans imaginaires conjugués.

III. Quadriques coupant le plan de l'infini suivant une droite double (toujours réelle) qui, pour le cylindre parabolique, est la droite centrale (génératrice à l'infini du cylindre).

IV. Les équations de la droite centrale sont, dans tous les cas, $F'_X = 0$, $F'_Y = 0$, $F'_Z = 0$, deux de ces équations entraînant la troisième. Tous les cylindres ont deux systèmes de génératrices rectilignes confondus en un seul (système double).

V. L'équation du plan central est $F'_X = 0$, $F'_Y = 0$ ou $F'_Z = 0$, ces trois équations étant identiques. Le système de génératrices rectilignes est indéterminé.

Théorème 2. — *La situation et l'espèce d'une quadrique donnée par son équation tangentielle*

$$(q) \qquad F(U, V, W, R) = \Sigma AU^2 + 2\Sigma BVW + 2\Sigma CUR + DR^2 = 0$$

sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :

I.	$Ad > 0,\ \alpha'' > 0$	$H > 0$	Quadrique imaginaire.	
		$H = 0$	Plan (quadrique se réduisant au plan polaire de l'origine).	
		$H < 0$	Quadrique réelle *non réglée*.	IV.
II.	$Ad < 0,\ \alpha'' > 0$ / $d \gtrless 0,\ \alpha'' \leqq 0$	$H < 0$	Id.	IV.
		$H = 0$	Conique (quadrique située dans son plan polaire de l'origine).	IV.
		$H > 0$	Quadrique réelle *réglée*.	IV.
III.	$d = 0$	$H < 0$	Quadrique réelle *non réglée* q_1.	IV.
		$H = 0$	(*Voir* le théor. 2 *bis* ci-après).	
		$H > 0$	Quadrique réelle *réglée* q_2.	

I. Quadriques auxquelles on ne peut mener de l'origine (*intérieure*) qu'un cône circonscrit imaginaire.

II. Quadriques auxquelles on peut mener de l'origine (*extérieure*) un cône circonscrit réel.

III. Quadriques auxquelles on peut mener de l'origine (*sur la surface*) un cône circonscrit se réduisant au plan tangent.

IV. La quadrique est hyperboloïde, paraboloïde ou ellipsoïde, selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0.$$

$H < 0$ caractérisant toujours une quadrique non réglée (E, P_e, H_2) et $H > 0$ une quadrique réglée (P_h ou H_1) [1], E correspond à ($AD < 0$, $H < 0$), H_2 à ($AD > 0$, $H < 0$), H_1 à ($AD > 0$, $H > 0$), P_e à ($D = 0$, $H < 0$), P_h à ($D = 0$, $H > 0$). Le plan polaire de l'origine a pour coordonnées $u = c$, $v = c'$, $w = c''$, $r = d$. Il coupe la quadrique suivant la conique

$$F(U, V, W, R) - \frac{H}{d} R^2 = 0.$$

L'équation du centre est

$$CU + C'V + C''W + DR = 0.$$

Théorème 2 *bis*. — *Si l'on a* $d = H = 0$, *la quadrique* q *se réduit à une conique située dans un plan passant par l'origine et dont la situation et l'espèce sont indiquées, sans exception, par le Tableau sui-*

---

(1) Cette propriété importante, constante quel que soit le système de coordonnées, est la conséquence d'un fait géométrique : Une quadrique est toujours du même genre (réglée ou non réglée) que ses corrélatives et ses transformées homographiques.

vant :

I.	$\alpha'' > 0$	$Aa' > 0$	Conique imaginaire.	IV.
		$a' = 0$	Droite.	
		$Aa' < 0$	Conique réelle.	
II.	$\alpha'' < 0$	$a' \gtrless 0$	Conique réelle.	
		$a' = 0$	Couple de points réels.	
III.	$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$	a, a' ou $a'' \gtrless 0$	Conique réelle q_3.	
		$a = a' = a'' = 0$: β, β' ou $\beta'' > 0$	Deux points imaginaires.	V.
		$\beta = \beta' = \beta'' = 0$	Deux points confondus.	
		β, β' ou $\beta'' < 0$	Deux points réels et distincts.	

I et II. Coniques (variétés respectives des quadriques q_1 et q_2) ne passant pas par l'origine, qui est seulement située dans leur plan. La droite ($\alpha'' > 0$, $a' = 0$) est la jonction de deux points imaginaires conjugués.

III. Coniques passant par l'origine (ou ayant leur droite de jonction y passant). Dans la conique q_3, la tangente à l'origine est la corrélative de la droite centrale (génératrice à l'infini) du cylindre parabolique.

IV. La conique est hyperbole, parabole ou ellipse selon que l'on a

$$AD > 0, \qquad D = 0 \qquad \text{ou} \qquad AD < 0$$

La polaire de l'origine (corrélative de la droite centrale d'un cylindre) a pour équations :

$$F'_u = 0, \qquad F'_v = 0, \qquad F'_w = 0,$$

deux quelconques entraînant la troisième.

V. L'équation du *point central* est

$$F'_u = 0, \qquad F'_v = 0 \qquad \text{ou} \qquad F'_w = 0,$$

équations identiques. Le plan central d'un couple de plans parallèles étant le plan polaire d'un point quelconque du plan de l'infini, le *point central* d'un couple

de points en ligne droite avec l'origine est le pôle d'un plan quelconque passant par l'origine.

Cas des coordonnées tétraédriques. — Supposons maintenant que l'équation ponctuelle (Q) soit établie en coordonnées *tétraédriques normales*, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ étant les équations respectives des faces a_1, a_2, a_3, a_4 du tétraèdre de référence $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Il est facile de voir alors, en se reportant au théorème 1, que ([1]):

1° Les quadriques ($Ad > 0$, $\alpha'' > 0$) coupent la face a_4 suivant une ellipse imaginaire; les quadriques ($Ad < 0$, $\alpha'' > 0$) ou ($d \neq 0, \alpha'' \leqq 0$) coupent cette face suivant une conique réelle; les quadriques ($d = 0$) la coupent suivant deux droites concourantes (r ou i), ou, en d'autres termes, lui sont tangentes. Les cas (I et II), avec $H = 0$, correspondent à un point (pôle de a_4) ou à un cône ayant son sommet en ce point. La quadrique ($Ad > 0$, $\alpha'' > 0$, $H > 0$) est imaginaire; dans tous les autres cas, $H > 0$ correspond à une quadrique réglée et $H < 0$ à une quadrique non réglée. Le sommet A_4 est extérieur, sur la quadrique, ou intérieur, selon que l'on a

$$AD > 0, \quad D = 0 \quad \text{ou} \quad AD < 0.$$

Les coordonnées du pôle de a_4 sont c, c', c'', d. Le cône circonscrit dont ce point est le sommet a pour équation

$$F(X, Y, Z, T) - \frac{H}{d} T^2 = 0.$$

Le plan polaire de A_4 a pour équation

$$CX + C'Y + C''Z + DT = 0.$$

Les résultats relatifs à (a_1, A_1), (a_2, A_2), (a_3, A_3) s'établissent de même, en remarquant que (A, A', A'', D) d'une part,

---

([1]) Ces propriétés sont même évidentes, en vertu du principe d'homographie, dont les coordonnées (trilinéaires ou) tétraédriques sont l'instrument, comme les coordonnées tangentielles sont celui du principe de dualité.

(B, B', B'', C, C', C'') de l'autre, ont des significations identiques.

2° En posant

$$\begin{aligned}\Phi = aa_1^2 + a'a_2^2 + a''a_3^2 - 2ba_2a_3 - 2b'a_3a_1 + 2b''a_1a_2 \\ + 2ca_1a_4 + 2c'a_2a_4 + 2c''a_3a_4 - da_4^2,\end{aligned}$$

la quadrique Q est ellipsoïde, paraboloïde ou hyperboloïde, selon que l'on a

$$a\Phi > 0, \qquad \Phi = 0 \qquad \text{ou} \qquad a\Phi < 0,$$

a étant ici un quelconque des mineurs a, a', a'', d, avec $H < 0$ pour E, P_e, H_2 et $H > 0$ pour E_i, P_h, H_1. Les coordonnées du centre sont Φ'_{a_1}, Φ'_{a_2}, Φ'_{a_3}, Φ'_{a_4}.

L'équation $\Phi(U, V, W, R) = 0$ est l'équation tangentielle de $F(X, Y, Z, T) = 0$.

Remarque. — Les résultats (1°) sont indépendants du système (normal, barycentrique, etc.) des coordonnées tétraédriques. Les résultats (2°) en dépendent essentiellement, parce que l'équation du plan de l'infini est fonction de a_1, a_2, a_3, a_4. En coordonnées *barycentriques*, cette équation devenant $\Sigma X = 0$, il suffit de substituer à la fonction $\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4)$ la fonction plus simple $\Phi(1, 1, 1, 1)$. Les coordonnées du centre sont alors $\Phi'_{a_1=1}$, $\Phi'_{a_2=1}$, $\Phi'_{a_3=1}$, $\Phi'_{a_4=1}$.

Nous laisserons au lecteur le soin : 1° d'examiner le théorème 1 *bis*, en remarquant qu'à un cylindre (cône de sommet à l'infini) correspond un cône dont le sommet est dans le plan a_4, et que, à un couple de plans parallèles (se coupant suivant une droite de l'infini) correspond un couple de plans se coupant suivant une droite du plan a_4; 2° de faire la traduction corrélative des théorèmes 2 et 2 *bis*, en substituant l'équation (q) à l'équation (Q). La fonction ψ_1 à substituer à Φ pour la détermination de l'espèce et du centre, est alors

$$\Psi = \Sigma A a_1^2 - 2\Sigma B a_2 a_3 + 2\Sigma C a_1 a_4 - D a_4^2,$$

c'est-à-dire $F(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

[M³5hβ]

NOTE SUR LE DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898;

Par M. GALLUCCI.

Le deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1897 a déjà produit un intéressant Mémoire de M. *Duporcq*, où sont données des démonstrations fort élégantes des théorèmes proposés.

M'étant occupé du même sujet, je l'ai traité par une autre méthode, qui permet d'énoncer plusieurs théorèmes nouveaux sur les cubiques équilatères et sur la cubique générale. Le point de départ est la considération des hyperboloïdes équilatères qui contiennent la cubique générale, et, par cette voie, j'ai réussi à compléter certains résultats de Reye, exposés dans le Mémoire : *Der gegenwartige stand unserer Kenntnisse in der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung* (*Festschrift der Wiss. Gesell., zu Hamburg*, 1890).

Mon Travail a été publié dans les *Rendiconti* de l'Académie royale de Naples (mai 1898); les résultats principaux sont les suivants :

1° *Reye* a démontré que l'on peut inscrire ∞^2 tétraèdres orthocentriques dans la cubique générale; les orthocentres sont sur une corde s de la cubique; on peut ajouter ce théorème :

Par deux points E, F *d'une cubique quelconque* k^3 *on ne peut, en général, faire passer une sphère qui coupe* k^3 *aux sommets d'un tétraèdre orthocentrique,*

mais si l'on peut faire passer une de ces sphères, on en peut faire passer ∞^1; *les tétraèdres que l'on obtient sont tous circonscrits à une parabole gauche orthogonale qui a pour directrice la corde s de* k^3; *les droites* E, F *appartiennent à une surface réglée du quatrième ordre.*

2° *A un tétraèdre quelconque* ABCD, *on peut circonscrire* ∞^1 *cubiques gauches équilatères qui appartiennent à l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre, de manière que, pour chaque point de cet hyperboloïde passe une seule de ces cubiques.*

Un corollaire immédiat de ce théorème est la propriété suivante, dont je propose la démonstration directe aux lecteurs des *Nouvelles Annales* :

Si, dans un pentagone gauche $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ *le sommet* A_1 *se trouve sur l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre* $A_2 A_3 A_4 A_5$, *le sommet* A_2 *se trouvera sur l'hyperboloïde des hauteurs de* $A_1 A_3 A_4 A_5$, *le sommet* A_3 *sur l'hyperboloïde des hauteurs de* $A_1 A_2 A_4 A_5$ ....

3° *Si* H^2 *est un hyperboloïde passant par une cubique gauche équilatère* k^3, *il existe* ∞^2 *tétraèdres* T *inscrits à la cubique et dont l'hyperboloïde des hauteurs est* H^2; *les sphères circonscrites aux tétraèdres* T *coupent la cubique aux deux mêmes points* E, F.

4° *Si* E, F *sont deux points quelconques d'une cubique gauche équilatère, les* ∞^2 *sphères passant par* E, F *coupent la cubique aux sommets de* ∞^2 *tétraèdres* T *qui ont un même hyperboloïde des hauteurs* H^2. *Les faces des tétraèdres* T *sont les plans osculateurs d'une infinité de paraboles gauches orthogonales.*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1898.

Mathématiques élémentaires.

On considère un triangle T dont les sommets sont A, B, C et une droite Δ dans son plan. On prend les symétriques d'un point O quelconque de la droite Δ par rapport aux côtés du triangle T, et l'on construit le centre O' du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus :

I. Trouver le lieu du point O' lorsque le point O décrit la droite Δ. Ce lieu est une conique S dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite Δ par rapport au triangle T. On indiquera également les positions de Δ pour lesquelles S lui est tangente ;

II. Trouver le lieu du centre de la conique S lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même.

Ce lieu est une conique S_1 qui dépend de la direction de Δ ;

III. Trouver le lieu du centre de S_1 lorsqu'on fait varier la direction de Δ ;

IV. Démontrer que, par tout point I de S, on peut mener trois droites OO' et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point I aux points de rencontre de Δ et de S ;

V. Dans le cas particulier où la droite Δ passe par le centre ω d'un cercle inscrit au triangle T, on propose de trouver l'enveloppe de la droite OO'. Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle T et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés Δ et les côtés de T sont six points placés sur une même conique.

Mathématiques spéciales.

Au système des deux points M, M', dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement (x, y, z) (x', y', z'), on en fait correspondre un troisième P de coordonnées (X, Y, Z) par

les formules

$$X = xx', \qquad Y = yy' \qquad Z = zz'.$$

1° On suppose que les points M, M′ décrivent une même droite Δ issue d'un point A (a, b, c) et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ.

On demande quels lieux décrit le point P quand M et M′ décrivent la droite Δ indépendamment l'un de l'autre, ou bien quand, l'un des points décrivant la droite Δ, l'autre reste fixe sur cette droite, ou bien, enfin, quand les deux points décrivent Δ, mais en restant confondus. Dire quelles relations existent entre ces divers lieux.

2° On suppose maintenant que les points M, M′ décrivent non plus une même droite, mais une même conique Ω, les coordonnées d'un point courant de cette conique Ω étant des fonctions rationnelles d'un paramètre λ,

$$x = \frac{a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}, \qquad y = \frac{b_2\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0},$$

$$z = \frac{c_2\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0},$$

où les a, b, c, d sont des coefficients constants.

Lorsque M et M′ décrivent Ω indépendamment l'un de l'autre, le point P décrit une surface S ; ses coordonnées sont des fonctions rationnelles du second degré de deux paramètres convenablement choisis. Dire quel lieu décrit le point P sur la surface S quand, M′ restant fixe sur la conique Ω, le point M décrit seul cette conique. Dire ensuite quel lieu décrit le point P quand M et M′ décrivent Ω, mais en restant liés par une relation homographique involutive. Quelles conclusions peut-on tirer du résultat relativement aux coniques situées sur la surface S ?

3° Quelle est la nature de la correspondance qui relie les points M et M′ sur la conique Ω, quand le point P décrit une section plane de la surface S ? Étudier et interpréter les cas de décomposition.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0.$$

où a désigne une constante, et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° Former le système des équations différentielles des caractéristiques;

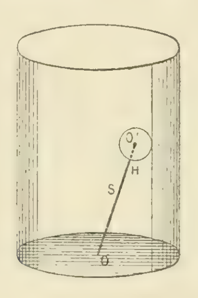
2° Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles;

3° Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée;

4° Dire à quoi doit se réduire la fonction $F(z)$ pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.

Mécanique rationnelle.

Un vase cylindrique, circulaire, droit, repose par le fond sur une table horizontale fixe. Le centre O de ce fond est lui-



même fixe, de sorte que le vase ne peut que tourner autour de la verticale du point O; on suppose d'ailleurs que ce mouvement de rotation a lieu sans frottement.

A l'intérieur du vase se trouve une tige OH, homogène et pesante, d'épaisseur constante infiniment petite, dont une extrémité est immobile au centre O, tandis qu'à l'autre extrémité H est fixée d'une manière invariable une sphère, aussi homogène et pesante, ayant son centre O' sur l'axe de la tige et s'appuyant contre la paroi interne du vase. Le corps solide S, constitué par la tige et la sphère, peut se mouvoir librement autour du point fixe O; mais on suppose que des frottements se développent au contact de ce corps avec la paroi interne du vase. On négligera les frottements de pivotement et de roulement, pour ne tenir compte que du frottement de glissement, dont le coefficient sera f.

A l'instant initial $t = 0$, le solide S est immobile et le vase est animé d'une vitesse de rotation ω_0 autour de la verticale ascendante du point O : trouver les mouvements du vase et du solide.

On désignera par R le rayon intérieur du vase, et par μ son moment d'inertie par rapport à son axe. On représentera par m la masse de la tige OH et par M celle de la sphère. On appellera $2a$ la longueur OO′, que l'on supposera supérieure à R, et ρ le rayon O′H de la sphère :

1° On trouvera d'abord les mouvements absolus du vase et du solide S dans le cas particulier où le rayon ρ de la sphère est nul;

2° On les obtiendra ensuite dans le cas général où ρ a une valeur quelconque moindre que R;

3° On discutera enfin le pivotement et le roulement du solide S sur le vase, et l'on écrira en particulier la condition nécessaire et suffisante pour que le roulement s'effectue constamment dans le même sens pendant toute la durée du mouvement. Négligeant ensuite la masse m de la tige et supposant invariable le rayon intérieur R du vase, on résumera la discussion précédente en la basant sur la valeur du rayon ρ de la sphère.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1898.

Composition de Mathématiques.

Les axes étant rectangulaires, on considère la surface T, du troisième degré,

$$(x^2 + y^2)(x + a) + z^2(x - a) = 0,$$

où a est une constante donnée :

1° Il existe une infinité de sphères S dont chacune a son centre dans le plan xOy et est orthogonale à la surface T en

tous les points de son intersection (¹) avec cette surface. Lieu des centres des sphères S;

2° Soit C l'intersection de la surface T et de l'une quelconque des sphères S : montrer que C se projette sur le plan xOy suivant une conique, et déterminer la portion de cette conique qui correspond à des points réels de C;

3° Construire la projection de la courbe C sur le plan zOx;

4° Il existe une infinité de sphères Σ dont chacune est tangente à la surface T tout le long de son intersection avec cette surface. Lieu des centres des sphères Σ (on pourra employer cette remarque que, par l'intersection de la surface T et d'une sphère quelconque, passent une infinité de surfaces du second degré);

5° Soit Γ la ligne de contact de T avec l'une quelconque des sphères Σ : montrer que cette ligne est un cercle; lieu des centres de ces cercles;

6° Montrer que toute sphère qui passe par un des cercles Γ coupe T suivant un autre cercle qui fait aussi partie des cercles Γ.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES EN 1898 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant rectangulaires,

On donne les points $A(x=a, y=0)$, $B(x=0, y=b)$ et la parallèle OC menée par l'origine O à AB.

On considère une parabole S tangente à OC et passant par les points A, B.

1° Quel est le lieu du pôle de AB?

2° Former l'équation du lieu N du point de concours des normales en A et B à la parabole S.

Considérations géométriques vérifiant le résultat.

(¹) Dans toute la question, par intersection de la surface T avec une sphère, on entend l'intersection à *distance finie*.

Tangentes à N aux points situés sur AB.

Tracé de la courbe N.

3° Former l'équation du lieu P du point de rencontre de la parabole S avec son diamètre passant par l'origine.

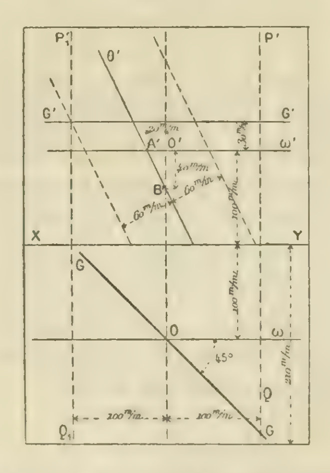
Tangentes à P aux points A, B, O.

4° Dans l'hypothèse $a = b$, former l'équation du lieu R des sommets des angles droits circonscrits à P. Reconnaître que ce lieu est une parabole.

5° Tracé de l'ensemble des lignes P, R dans l'hypothèse $a = b = 108$ unités (l'unité est arbitraire).

Géométrie descriptive.

Intersection d'un hyperboloïde avec un cylindre de révolution. — 1° L'hyperboloïde a son axe ($O\omega$, $O'\omega'$) parallèle à la ligne de terre (cote du point $O' = 100^{mm}$, éloignement du point $O = 100^{mm}$, projetante OO' au milieu de la feuille de



l'épure). La génératrice horizontale (GG, $G'G'$) fait avec l'axe ($O\omega$, $O'\omega'$) un angle de 45° et est situé à 30^{mm} au-dessus du plan horizontal contenant cet axe.

2° Le cylindre de révolution a 60^{mm} de rayon, son axe θ' est de front, il rencontre l'axe $O'\omega'$ en A' (distance $O'A'$ à gauche de $O' = 20^{mm}$) et la projetante de OO' en B' en dessous de O (distance $O'B' = 40^{mm}$).

On demande de déterminer l'intersection de l'hyperboloïde et du cylindre, en ayant soin d'indiquer d'une manière très nette les constructions nécessaires pour obtenir un point de la courbe et sa tangente. Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

On représentera l'hyperboloïde seul limité aux deux plans de profil $P'Q$ et $P'_1 Q_1$ à distance égale 100^{mm} du centre OO', en supprimant de ce corps la portion contenue dans le cylindre.

Cadre de 27 sur 45. Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 210^{mm} du côté inférieur.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Hyperboloïde et cylindre.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, par *Jules Tannery,* Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et *Jules Molk,* Professeur à l'Université de Nancy. Quatre volumes gr. in-8°, se vendant séparément. Tome I : *Introduction. Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893, 7 fr. 50 c. — Tome II : *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896, 9 fr. — Tome III : *Calcul intégral* (Ire Partie); 1898, 8 fr. 50 c. — Tome IV : *Calcul intégral* (IIe Partie) *et Applications.* (*Sous presse*). Paris, Gauthier-Villars et fils.

Extrait de la Préface.

Nous avons réuni dans une *Introduction* les éléments de la théorie des séries et des produits infinis qui nous ont paru indispensables. Les propositions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire qui se déduisent de la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires, propositions dont nous ferons largement usage, ont été, dans cette Introduction, systématiquement laissées de côté :

elles sont, depuis longtemps, inscrites dans le programme de la licence ès Sciences mathématiques; elles sont partout très bien enseignées et sont développées dans d'excellents livres, qui sont bien connus. On insiste souvent moins sur le rôle que jouent, dans la théorie des fonctions, les séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable, bien que Cauchy ait mis pleinement ce rôle en lumière (1). Il nous importait surtout d'exposer avec détail quelques-uns des résultats essentiels obtenus par M. Weierstrass. Cette Introduction, nous espérons que beaucoup de nos lecteurs pourront se dispenser de la lire en entier; mais si, dans la suite, ils ont quelque inquiétude sur la rigueur de certaines démonstrations et transformations, ils pourront y recourir.

Nous introduisons immédiatement la fonction σu sous forme de produit infini. Cette voie directe, qui est celle de Weierstrass, nous a paru naturelle et facile dans l'état actuel de l'enseignement. Les propriétés essentielles de cette fonction et de celles qui en dérivent sont développées dans le premier Volume. Le second Volume contient la théorie des fonctions $\mathfrak{S}$ et celle de leurs quotients, les fonctions sn, cn, dn de Jacobi. Il termine ce qui se rapporte au *Calcul différentiel*.

Dans le troisième Volume se trouvent, d'une part, les théorèmes généraux sur les fonctions doublement périodiques et leurs intégrales, déduits pour la plupart de la proposition célèbre de M. Hermite sur la décomposition en éléments simples, et, d'autre part, l'exposition du problème général de l'*Inversion*. Enfin, dans le dernier Volume, on étudiera les intégrales elliptiques, en insistant sur le cas où les coefficients sont réels ainsi que les chemins d'intégration. On terminera ainsi ce qui se rapporte au *Calcul intégral*. On abordera ensuite le problème de la transformation et l'on développera quelques applications d'une nature élémentaire se rapportant à des branches diverses de la Science.

Un des ennuis de la théorie des fonctions elliptiques est dans la richesse même des formules qu'elle comporte et que la mémoire semble incapable de fixer. Il faut pouvoir renvoyer

(1) Il y a déjà longtemps que M. Méray l'a exposé d'une façon systématique dans son *Précis d'Analyse infinitésimale* et dans une suite de beaux Mémoires.

à ces formules et les retrouver facilement : nous avons adopté, pour les plus importantes, un système de numérotage auquel nous prions le lecteur de vouloir bien s'accoutumer. Il les retrouvera toutes, avec leurs numéros, dans un Tableau dont la première partie se trouve à la fin du *Calcul différentiel* et la seconde à la fin du *Calcul intégral :* ce Tableau constituera comme un résumé de la Théorie et facilitera beaucoup, nous l'espérons, la lecture et l'usage de notre Livre.

Les notations que nous avons adoptées au début sont, sauf quelques légères modifications sur lesquelles nous nous expliquerons tout à l'heure, celles de M. Weierstrass; mais nous n'avons pas cru devoir nous borner aux fonctions qu'il a introduites. Ces fonctions sont, d'une part, très propres à traiter de la façon la plus simple beaucoup d'applications, beaucoup de celles, en particulier, qui se rapportent à la Géométrie et à la Mécanique. D'autre part, elles se prêtent très bien, en raison même de la façon symétrique dont les périodes y figurent, à l'exposition d'un très grand nombre de propriétés, qui peuvent être regardées comme véritablement élémentaires. Il nous a donc paru qu'elles constituaient un excellent point de départ. Mais, d'un autre côté, bien des propriétés, et des plus importantes, tant en Algèbre qu'en Arithmétique, n'apparaissent que lorsqu'on sépare les périodes : elles restent cachées là où les périodes sont engagées d'une façon symétrique. Là où importe cette séparation des périodes, d'autres notations reprennent l'avantage. Nous avons donc cru devoir laisser une place considérable à ces fonctions de Jacobi, dont on a dit qu'elles ne joueraient plus qu'un rôle historique : à la vérité, ce rôle serait encore assez beau. Il ne faudrait pas s'étonner si la multiplicité des notations se trouvait être dans la nature des choses et s'il convenait d'en changer suivant les questions que l'on aborde. Il semble d'abord que cette multiplicité soit une gêne et un ennui, il se peut qu'elle soit une richesse. Quoi qu'il en soit, nous avons mis tous nos soins à bien expliquer comment les diverses notations se raccordent les unes aux autres et à faciliter la lecture des principaux Mémoires et Traités.

C'est le désir d'une parfaite symétrie qui nous a conduits à écrire ω_1, ω_2, ω_3 là où M. Weierstrass écrit ω, $-\omega''$, ω'. Cette modification n'altère pas les fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$: elle permet de condenser singulièrement les formules et

d'en écrire une seule lorsque, autrement, il faut en écrire trois. Ce changement présente, en apparence (mais en apparence seulement, comme on ne manquera pas de l'observer après avoir lu les Chapitres de l'*Inversion*), quelque inconvénient : le plus grand, à nos yeux, est d'obliger à un peu d'attention le lecteur qui voudra se reporter aux *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwarz. C'est au lecteur à juger si les raisons de symétrie, qui nous ont décidés et qui sont évidentes, étaient assez fortes pour que nous nous permissions de nous mettre un peu en désaccord avec cette belle publication, qui présente, à tant d'égards, un caractère définitif : c'est après bien des hésitations que nous nous sommes résolus à ce léger changement.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 324 et 414.

324. (**1856**, p. 229; **1898**, p. 148). — *Quelles sont les phases de la Terre et les éclipses de Terre, pour un spectateur placé dans la Lune?*

414. (**1858**, p. 31; **1898**, p. 292). — *Quel est l'aspect du monde pour un spectateur placé sur la Lune supposée sans atmosphère? Par quels moyens ce spectateur peut-il reconnaître que la Lune tourne autour de la Terre et pas la Terre autour de la Lune?*

SOLUTION

Par M. Gardès.

Supposons que les progrès de la Science chez les Sélénites aient marché comme chez nous.

Ces êtres hypothétiques ont commencé, comme nos ancêtres, par croire que les étoiles tournaient autour d'eux en vingt-sept de nos jours sept heures quarante-trois minutes onze secondes, puisque c'est dans ce temps que la Lune accomplit sa révolution sur elle-même, et ce fut le jour sidéral lunaire.

Ils ont vu le Soleil mettre un peu plus de temps pour tourner autour de la Lune à cause de son mouvement propre d'Occident en Orient sur la sphère céleste : cela leur a permis de trouver le *jour solaire* de la Lune, composé à peu près régulièrement d'une nuit, de quatorze de nos jours dix-huit heures vingt-deux minutes une seconde et demie succédant à une période éclairée de même durée, et ce, brusquement, sans crépuscule, par suite de l'absence d'atmosphère. Aucun nuage n'arrêtant les rayons du Soleil ou n'empêchant le rayonnement, il fait d'autant plus chaud le jour et d'autant plus froid la nuit que la longueur des jours est plus de quatorze fois supérieure à ce qu'elle est chez nous.

Lorsqu'ils se sont rendu compte du mouvement rétrograde du Soleil, ils ont vu revenir cet astre au même point du ciel au bout de un de nos ans moyens et 0,006374 de nos jours solaires moyens : ce fut leur *année sidérale.*

Leur *année tropique* est plus difficile à calculer, car elle dépend des angles variables formés par l'équateur lunaire avec le plan de l'orbite lunaire, et par ce plan avec celui de l'écliptique; elle dépend aussi de la rétrogradation des nœuds en dix-huit ans deux tiers; on peut dire cependant que la Lune reste en moyenne à la même distance du Soleil que nous, mais que, dans chaque jour solaire de la Lune, la face qui nous regarde n'étant soumise entière aux rayons du Soleil qu'à l'époque de l'opposition, reçoit un peu moins de chaleur que la face opposée, car celle-ci est frappée en plein par les rayons solaires lorsque la Lune est en conjonction, c'est-à-dire à environ 120 rayons terrestres plus près du Soleil.

L'aspect du monde, vu de la Lune, ne diffère pas sensiblement de celui que nous pouvons observer de la Terre, sauf, bien entendu, pour ce qui concerne l'aspect de la Terre, pour le fond noir et non bleu de ciel, et pour le mouvement de la sphère céleste qui tourne autour d'un axe différent. Sans parler de la libration, l'obliquité des plans de l'équateur de la Lune, de son orbite et de l'écliptique modifie bien un peu les positions relatives des planètes; la valse lente que la Lune danse autour de la Terre, amène bien aussi quelques légères modifications dans ces positions relatives, mais tout Sélénite autre qu'un astronome n'y prendra pas garde.

Là où les aspects diffèrent, c'est de la Terre à la Lune, ou de la Lune à la Terre. La Terre paraîtra au Sélénite à peu

près fixe dans le ciel, puisque la Lune accomplit dans le même temps sa révolution autour de la Terre et sa rotation sur elle-même; il la verra tourner sur place comme une toupie, et présenter ses phases successives. Il s'agit ici, bien entendu, du Sélénite habitant la portion de la Lune qui nous est toujours visible; des habitants des autres portions de la Lune, les uns ne verront jamais la Terre et les autres, habitant les parties que la libration nous découvre, pourront voir de temps en temps notre planète.

Quant aux phases, elles ne seront pas très nettes; la présence de l'atmosphère terrestre estompera les lignes de démarcation entre les parties éclairées de la Terre et les parties restées dans l'ombre; d'autre part la rotation rapide de la Terre modifiera sa figure pendant la durée de chaque phase et cette figure sera encore elle-même modifiée sans cesse, car les nuages lui constitueront un masque de forme variable et toujours en mouvement : la lumière cendrée ne sera qu'un rêve. Enfin, les phases ne correspondront pas à celles que nous observons; elles se reproduiront bien en vingt-neuf jours douze heures quarante-quatre minutes deux secondes neuf dixièmes qui constitueront la durée du *mois terrestre*, mais à notre nouvelle Lune correspondra la *pleine Terre*, à la pleine Lune la *nouvelle Terre*, au premier quartier de la Lune le *dernier* de la Terre et inversement.

Le Soleil, vu de la Lune, présentera en moyenne le même diamètre apparent que vu de la Terre; mais, chaque mois, ce diamètre apparent subira, en outre, des variations très sensibles. En effet, à l'époque de la pleine Lune, celle-ci étant plus éloignée du Soleil que la Terre de soixante rayons terrestres, la parallaxe moyenne de toutes les époques de pleine Lune sera de 15′30″ environ; aux quartiers, la Terre et la Lune étant également distantes du Soleil, la parallaxe moyenne sera de 16′1″,82; à l'époque de la nouvelle Lune, la parallaxe moyenne de toutes les néoménies sera d'environ 16′33″,64.

Le rayon terrestre vu de la Lune sous-tendra un angle de 28′31″, tandis que pour nous le rayon lunaire est mesuré par 15′34″.

Cela permettra de voir que la Lune est tantôt plus près du Soleil que la Terre, tantôt plus loin. L'astronome sélénite calculera comme nous sa distance au Soleil par l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, par exemple, et ce, s'il est

possible, au moment de l'opposition et à celui de la conjonction; la différence de ces deux mesures lui fera voir que la Terre ne s'éloigne pas du Soleil tous les mois, comme la Lune; il pourra trouver le rayon de l'orbite lunaire et au moyen de la parallaxe la valeur du rayon terrestre et le volume de la Terre. Il devra conclure nécessairement de ces calculs qu'un astre gros comme la Terre ne peut pas tourner autour de la Lune alors que sa distance au Soleil ne subit pas les mêmes écarts que la distance de la Lune au Soleil. Il en sera persuadé s'il calcule aussi le volume de la Lune au moyen des éclipses annulaires terrestres, ou s'il exécute directement sur la Lune des mesures susceptibles de lui donner ce volume et s'il le compare à celui de la Terre : s'il lance en l'air un système de deux boules d'inégale grosseur et reliées par une corde, il ne verra pas la grosse boule obéir à la petite.

Enfin les éclipses, puisque nous venons de dire qu'il y en aurait, seront à peu près les mêmes que chez nous; mais notre atmosphère empêchera des observations précises: la durée de ces phénomènes sera, en général, plus longue que chez nous, la Lune tournant vingt-sept fois moins vite que la Terre, ou, du moins, ils resteront visibles pendant toute leur durée pour les mêmes habitants de la Lune; enfin, nos éclipses annulaires, partielles ou totales de Soleil ne pourront donner lieu qu'à des éclipses annulaires ou partielles de Terre et nos éclipses totales ou partielles de Lune qu'à des éclipses totales ou partielles du Soleil.

Note. — Pour une autre solution, due à M. Berdellé, voir l'*Intermédiaire de l'AFAS,* où ces deux questions ont été récemment proposées. LES RÉDACTEURS.

Question 399.

Cette question, dont l'énoncé est reproduit (juin 1898, p. 291) comme celui d'une ancienne question non résolue, ne figurait pas sur la liste du 31 décembre 1897. Elle a été, en effet, résolue par M. Genty, en 1893, page 6*. Nous devons cette rectification à l'obligeance de M. Hilaire, auquel nous adressons nos plus sincères remercîments. LES RÉDACTEURS.

[M²4d]

SUR LA SURFACE DE STEINER;

Par M. E. LACOUR,
Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

Une surface est dite *unicursale* quand les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles de deux paramètres. On peut regarder les deux paramètres comme les coordonnées d'un point pris dans un plan auxiliaire (Π) et rapporté à deux axes fixes. A tout point m du plan (Π) correspond alors un seul point M de la surface; en supposant de plus qu'à un point M de la surface correspond en général un seul point m du plan (Π), on dit que la surface est *représentée* sur le plan (Π) et l'on désigne le point m sous le nom d'*image* du point M.

Nous allons étudier ici une surface unicursale du quatrième ordre, signalée par Steiner et qui peut être représentée sur un plan, de façon que les sections planes de la surface aient pour images des coniques. Nous choisirons, dans les propriétés bien connues de cette surface, celles dont la démonstration permettra de montrer le plus simplement l'utilité de ce mode de représentation.

1. *Représentation de la surface sur un plan.* — La surface de Steiner peut être définie à l'aide de l'équation

$$(S) \qquad Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 - 2XYZ = 0,$$

si on la rapporte à trois axes, OX, OY, OZ, convenablement choisis. On voit de suite qu'elle a un point triple

à l'origine et trois droites doubles passant par ce point, les droites OX, OY, OZ.

Une sécante variable passant par le point triple rencontre la surface en un seul point variable : de là résulte la possibilité de représenter la surface sur un plan. Nous allons d'abord insister sur cette représentation.

Soient α, β, γ les paramètres directeurs d'une sécante passant par le point O, et X, Y, Z les coordonnées d'un point M pris sur cette sécante, de sorte qu'on peut poser

$$X = \alpha\rho, \qquad Y = \beta\rho, \qquad Z = \gamma\rho.$$

En exprimant que le point M est sur la surface, on trouve

$$(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)\rho = 2\alpha\beta\gamma,$$

puis

$$X = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2},$$

$$Y = \frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2},$$

$$Z = \frac{2\alpha\beta\gamma^2}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

Ces formules se simplifient si l'on pose

$$x = \beta\gamma, \qquad y = \gamma\alpha, \qquad z = \alpha\beta;$$

on obtient ainsi

$$X = \frac{2yz}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Y = \frac{2zx}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Z = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

et il est facile de vérifier que, quels que soient x, y, z, les valeurs de X, Y, Z, définies par ces formules, satisfont à l'équation de la surface (S).

Nous regarderons x, y, z comme les coordonnées homogènes d'un point m pris dans un plan (Π) et rapporté à deux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ choisis dans ce plan : on voit d'abord que, à tout point m du plan (Π), les formules précédentes font correspondre un seul point M de la

surface (S). Réciproquement, à un point M pris sur la surface et non situé sur les droites doubles OX, OY, OZ correspond un seul point m du plan (II), celui dont les coordonnées homogènes sont définies par les égalités

$$Xx = Yy = Zz.$$

A chacun des points pris sur l'une des lignes doubles correspondent deux points du plan (II) situés sur l'un des axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ ou sur la droite de l'infini. Par exemple au point

$$X = h, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

correspondent les deux points

$$x = 0, \quad h(y^2 + z^2) - 2yz = 0;$$

ces points, situés sur $\omega\eta$, sont conjugués par rapport aux deux points b et b' de cet axe pour lesquels on a

$$y^2 - z^2 = 0.$$

Enfin, au point triple O de la surface correspondent trois points sur le plan (II), le point ω et les points à l'infini sur les axes $\omega\xi$, $\omega\eta$.

2. *Les sections planes de* (S) *ont pour images des coniques*.— La surface S ayant trois droites doubles, la section, par un plan quelconque, a trois points doubles, et comme cette section est une ligne du quatrième degré elle est unicursale [1]. De plus, une section plane quelconque de (S) a pour image une conique; car la condition nécessaire et suffisante pour que le point (X, Y, Z) de la surface soit sur le plan

$$uX + vY + wZ + h = 0,$$

[1] M. Picard a démontré que les seules surfaces algébriques, dont toutes les sections planes sont unicursales, sont les surfaces réglées unicursales et la surface du quatrième ordre de Steiner.

est que le point correspondant (x, y, z) du plan (II) satisfasse à la condition

$$(C)\qquad 2uyz + 2vzx + 2wxy + h(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

qui est bien l'équation d'une conique : nous appellerons conique (C) l'une quelconque des coniques, images des sections planes de (S). Toutes les coniques (C) divisent harmoniquement les deux segments aa' et bb', dont les extrémités sont déterminées par les équations

$$aa' \begin{cases} y = 0, \\ x^2 - z^2 = 0, \end{cases} \qquad bb' \begin{cases} x = 0, \\ y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Ces conditions suffisent pour déterminer le système linéaire des coniques (C), système qui dépend de trois paramètres variables.

3. *L'image de la section par un plan tangent se décompose en deux droites. Équation tangentielle.* — La section par un plan tangent présente un point double au point de contact, en plus des trois points doubles situés sur OX, OY, OZ; mais une ligne du quatrième degré qui a quatre points doubles doit se décomposer. On est donc conduit à penser que la surface de Steiner est coupée suivant deux coniques par l'un quelconque de ses plans tangents.

Il est facile de vérifier que l'image de la section par un plan tangent se décompose en deux droites. Pour cela, il suffit de calculer les coordonnées u_1, v_1, w_1, h_1 du plan tangent en un point $M(X_1, Y_1, Z_1)$ à l'aide des coordonnées x_1, y_1, z_1 de l'image du point de contact. On a d'abord

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(Y_1^2 + Z_1^2) - Y_1 Z_1, \\ v_1 &= Y_1(Z_1^2 + X_1^2) - Z_1 X_1, \\ w_1 &= Z_1(X_1^2 + Y_1^2) - X_1 Y_1, \\ h_1 &= \quad X_1 Y_1 Z_1 ; \end{aligned}$$

puis

$$\rho u_1 = x_1(y_1^2 + z_1^2 - x_1^2),$$
$$\rho v_1 = y_1(z_1^2 + x_1^2 - y_1^2),$$
$$\rho w_1 = z_1(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2),$$
$$\rho h_1 = -2x_1 y_1 z_1.$$

La conique image de la section

$$C(x, y, z) = h_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2u_1 yz + 2v_1 zx + 2w_1 xy = 0$$

a bien pour point double le point x, y, z, puisque les équations

$$\tfrac{1}{2}C'_x = h_1 x + w_1 y + v_1 z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}C'_y = w_1 x + h_1 y + u_1 z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}C'_z = v_1 x + u_1 y + h_1 z = 0$$

sont vérifiées identiquement quand on y fait

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad z = z_1.$$

Réciproquement, si la conique

$$(\mathrm{C}) \qquad h(x^2 + y^2 + z^2) + 2uyz + 2vzx + 2wxy = 0$$

se décompose en deux droites, c'est l'image de la section de la surface (S) par l'un de ses plans tangents, car, si l'on exprime que la conique (C) admet comme point double le point x, y, z, on obtient trois équations qui déterminent, à un facteur commun près, les valeurs de u, v, w, h, et les valeurs ainsi déterminées sont les coordonnées du plan tangent à la surface (S) au point ayant pour image le point x_1, y_1, z_1.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que le plan* (u, v, w, h) *soit tangent à la surface* (S) *est que la section de la surface par ce plan ait pour image une conique qui se décompose en deux droites.*

On aura donc l'équation tangentielle de la surface (S) en égalant à zéro le discriminant du premier membre de l'équation

$$h(x^2 + y^2 + z^2) + 2uyz + 2vzx + 2wxy = 0.$$

ce qui donne

$$h^3 - h(u^2 + v^2 + w^2) + 2uvw = 0.$$

Remarques. — On peut voir directement que, si une ligne de la surface (S) a pour image une droite δ, cette ligne est une conique. Cela résulte de ce que les coordonnées x, y, z d'un point de δ sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ; par suite, les coordonnées X, Y, Z du point correspondant de la surface sont, chacune, le quotient de deux trinomes du deuxième degré en λ.

Donc, quand l'image de la section par un plan P se décompose en deux droites δ et δ', la section se décompose en deux coniques dont les images sont précisément les droites δ et δ'.

Il est facile de *construire géométriquement les deux droites* δ *et* δ', *en lesquelles se décompose l'image de la section par un plan tangent,* quand on se donne l'image m du point de contact. En effet, les droites δ et δ' divisent harmoniquement les deux segments aa', bb' (*voir* n° 2); ce sont donc les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples de droites (ma, ma') et (mb, mb'). Cette involution est celle des couples de tangentes menées de m aux coniques inscrites dans le quadrilatère $aba'b'$. Donc δ *et* δ' *sont les tangentes menées en* m *aux coniques du faisceau tangentiel* $AA' + \lambda BB' = 0$ *qui passent par le point* m, $AA'BB'$ désignant les premiers membres des équations tangentielles des points $aa'bb'$.

4. *Plans tangents singuliers.* — Pour que les tangentes menées de m aux coniques inscrites dans le quadrilatère $aa'bb'$ soient confondues, il faut et il suffit que le point m soit sur l'un des côtés du quadrilatère.

Dans ce cas, l'image de la section par le plan tangent correspondant au point m se compose de deux droites confondues ; la section par ce plan tangent doit se composer de deux coniques confondues et le plan tangent doit être un plan tangent singulier.

Il est facile de le vérifier par le calcul. Les coordonnées des points a, a', d'une part, b, b', d'autre part, sont données par les équations

$$y = 0, \qquad x = 0,$$
$$x^2 - z^2 = 0, \qquad y^2 - z^2 = 0.$$

On en déduit, pour les équations des côtés du quadrilatère,

$$x + y + z = 0, \qquad x - y + z = 0,$$
$$x + y - z = 0, \qquad -x + y + z = 0.$$

Quand le point m est sur le côté $x + y + z = 0$, l'image de la section par le plan tangent au point correspondant de (S) est $(x + y + z)^2 = 0$, ou encore

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0.$$

On reconnaît sur cette équation l'image de la section par le plan

$$X + Y + Z + 1 = 0.$$

On voit ainsi qu'aux quatre côtés du quadrilatère correspondent les quatre plans tangents

$$X + Y + Z + 1 = 0,$$
$$X - Y - Z + 1 = 0,$$
$$-X + Y - Z + 1 = 0,$$
$$-X - Y + Z + 1 = 0.$$

Comme vérification, on peut mettre l'équation de la surface (S) sous l'une des formes

$$(YZ + ZX + XY)^2 = 2XYZ(X + Y + Z + 1),$$
$$(-YZ + ZX + XY)^2 = 2XYZ(X - Y - Z + 1),$$
$$(YZ - ZX + XY)^2 = 2XYZ(X + Y - Z + 1),$$
$$(YZ + ZX - XY)^2 = 2XYZ(-X - Y + Z + 1).$$

dont chacune met en évidence l'un des plans tangents singuliers et la conique suivant laquelle il touche la surface (S).

Ainsi, *la surface de Steiner admet quatre plans tangents singuliers et chacun de ces plans touche la surface le long d'une conique.*

On s'assure, à l'aide de l'équation tangentielle, qu'il n'y a pas d'autres plans tangents singuliers que les quatre plans qui viennent d'être considérés.

5. *Ligne parabolique.* — En général, la ligne parabolique d'une surface peut être définie comme le lieu d'un point M de la surface tel que dans la section de la surface par le plan tangent en M, le point double qui se trouve au point de contact a ses deux tangentes confondues.

Dans le cas particulier de la surface de Steiner, la section par le plan tangent se compose de deux coniques ayant déjà trois points communs sur les droites doubles OX, OY, OZ. Si ces coniques doivent encore être tangentes au point de contact, elles sont nécessairement confondues, et il en est de même des deux droites δ et δ', images de ces deux coniques. On conclut de là qu'un point M de la ligne parabolique a pour image un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère $aba'b'$; le point M lui-même doit alors être sur la conique de contact de l'un des quatre plans tangents singuliers.

Donc, pour la surface de Steiner, la ligne parabolique *se décompose en quatre coniques et ces coniques sont les lignes de contact de la surface avec ses quatre plans tangents singuliers.*

6. *Lignes asymptotiques.* — Proposons-nous de trouver sur la surface (S) une ligne telle que, en chacun de ses points, cette ligne soit tangente à l'une des deux

coniques, section de la surface par le plan tangent en ce point (on peut définir de cette façon les lignes asymptotiques de la surface S).

On sait que, quand une surface est représentée point par point sur un plan, si deux lignes de la surface sont tangentes en un point M, leurs images sont tangentes au point m, image de M. Or, les deux coniques, section de la surface (S) par le plan tangent en un point M de (S), ont pour images les deux droites δ et δ' dont l'ensemble forme une conique (C) ayant pour point double le point m image de M. On est donc ramené à trouver dans le plan (Π) une ligne telle qu'en chacun de ses points cette ligne soit tangente à l'une des droites δ et δ' qui correspondent à ce point et la solution de ce problème est immédiate si l'on se rappelle la construction géométrique des droites δ et δ'.

On a vu que les droites δ et δ' correspondant à un point m du plan (Π) sont les tangentes en m aux coniques du faisceau tangentiel $AA' + \lambda BB' = 0$ qui passent par ce point. Si donc le point m se déplace sur l'une des coniques du faisceau tangentiel, la tangente au déplacement sera à chaque instant l'une des deux droites δ et δ'.

Donc les lignes cherchées dans le plan (Π) sont les coniques inscrites dans le quadrilatère $aa'bb'$, et comme ce sont les images des lignes asymptotiques de (S), on voit que pour la surface de Steiner l'équation différentielle des lignes asymptotiques peut être intégrée en s'aidant des considérations géométriques qui viennent d'être exposées.

[P2a]

SUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE DUALITÉ AUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE;

PAR M. L. RIPERT,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Généralités et définitions.

1. Dans un plan S, tout théorème projectif a un corrélatif, résultant de la corrélation du point et de la droite, qui entraîne toutes les autres. Mais, en outre, il y a *corrélation directe* d'une figure tracée dans le plan S avec une figure de l'espace rayonnant autour d'un point S. Les principaux éléments de cette seconde corrélation sont indiqués en regard par le Tableau suivant :

Dans le plan S.	*Autour du sommet* S.
Point (d'intersection de deux droites).	Plan (de jonction de deux droites).
Droite (de jonction de deux points).	Droite (d'intersection de deux plans).
Droite d'intersection du plan S et d'un plan M. En particulier, la droite de l'infini I est l'intersection de S et du plan de l'infini. Le corrélatif de la droite I, *dans le plan* S, est un point arbitrairement choisi O, que j'appellerai *origine*.	Droite de jonction du point S et d'un point M. En particulier, une *droite spéciale* J est la ligne de jonction de S et du point choisi arbitrairement comme corrélatif du plan de l'infini. Le corrélatif de la droite J, *autour du sommet* S, est un plan arbitrairement choisi O, que j'appellerai *plan originel*.
Triangle, ses sommets, ses côtés.	Trièdre, ses faces, ses arêtes.
Courbe du n^e ordre, ses points, ses tangentes, etc.	Cône de n^e classe, ses plans tangents, ses génératrices, etc.

Je me borne, pour le moment, à ces indications, suffisantes pour les transformations purement descriptives, que j'examinerai d'abord. D'autres définitions seront nécessaires pour les théorèmes dans lesquels interviennent des éléments *conjugués* (par rapport à une conique ou un cône (¹)], puis des éléments *moyens* et enfin des éléments *métriques*.

2. De même que la première partie du Tableau fait ressortir la corrélation de la droite et du point dans le plan S, de même, la seconde partie montre une *corrélation spéciale* (à la géométrie autour de S) entre la droite et le plan.

Ceci posé, soit un théorème *a* du plan S; il lui correspond, dans ce plan, un théorème corrélatif *b*, puis, autour du point S, un second théorème corrélatif *c*; enfin, au théorème *b* du plan S correspond, autour de S, un corrélatif *d*, qui est en outre le corrélatif *spécial* de *c*.

Il est donc possible de quadrupler tout théorème projectif du plan ou, en d'autres termes, d'en déduire un groupe de quatre théorèmes *associés*.

Les exemples suivants, que l'on peut multiplier indéfiniment, ne laisseront aucun doute sur la généralité et l'efficacité de l'application. J'emploierai, pour les quatre énoncés, les mêmes notations qui auront ainsi, dans un même groupe, des significations distinctes mais corrélatives. Les lettres *a*, *b*, *c*, *d* indiqueront toujours l'ordre de corrélations défini ci-dessus.

(¹) Le mot *cône* désignera, à moins d'indication contraire, un cône du 2ᵉ degré (2ᵉ ordre et 2ᵉ classe).

Exemples de corrélations purement descriptives.

3. *a* et *b*. Deux triangles du plan S sont dits *homologiques* si les droites de jonction des sommets correspondants concourent en un même point (*centre d'homologie*). Les intersections des côtés correspondants sont alors sur une même droite (*axe d'homologie*) et réciproquement.

c et *d*. Deux trièdres de même sommet S seront dits *homologiques* si les droites d'intersection des faces correspondantes sont dans un même plan (*plan d'homologie*). Les plans de jonction des arêtes correspondantes se coupent alors suivant une même droite (*droite d'homologie*), et réciproquement.

4. *a*. Si, dans le plan S, on joint les sommets A, B, C d'un triangle à deux points quelconques D_1 et D_2, et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les points d'intersection des droites ainsi obtenues avec une conique quelconque circonscrite à ABC, les droites de jonction A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un triangle qui est homologique à ABC [théorème de M. Jérabek, *Mathesis*, p. 204; 1888 (¹)].

b. Si, dans le plan S, on coupe les côtés A, B, C d'un triangle par deux droites quelconques D_1 et D_2, et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les secondes tangentes menées par les points ainsi obtenus à une conique quelconque inscrite à (A, B, C), les points d'intersection

(¹) Le théorème de M. Jérabek a donné naissance à un article très important de M. Neuberg, *Sur les transformations quadratiques involutives* (*Mathesis*, p. 177; 1888). Cet article *tout entier* est susceptible d'être quadruplé par dualité. Je me propose de revenir sur ce sujet.

A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un triangle qui est homologique avec (A, B, C) (*Mathesis, loc. cit.*).

c. Si l'on coupe les faces A, B, C d'un trièdre de sommet S par deux plans quelconques D_1, D_2 (passant par S) et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les seconds plans tangents menés par les droites ainsi obtenues à un cône quelconque inscrit au trièdre (A, B, C), les droites d'intersection A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un trièdre qui est homologique avec (A, B, C).

d. Si l'on joint par des plans les arêtes A, B, C d'un trièdre de sommet S à deux droites quelconques D_1, D_2 (passant par S) et si A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont les secondes génératrices d'intersection des plans ainsi obtenus avec un cône quelconque circonscrit au trièdre ABC, les plans de jonction A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 forment un trièdre qui est homologique avec ABC.

5. *Remarque*. — Le théorème *d*, corrélatif de *b*, est un corollaire de *a* par perspective, et de même le théorème *c*, corrélatif de *a*, est un corollaire perspectif de *b*. Cette remarque, qui peut être répétée pour les exemples suivants, montre la liaison intime des quatre théorèmes d'un groupe. En outre, avec le principe de dualité, un théorème *initial* étant démontré, les trois théorèmes *associés* n'ont plus besoin d'autre démonstration que la vérification de la corrélation des énoncés.

Exemples de corrélation avec éléments conjugués.

6. Il est nécessaire de rappeler et préciser d'abord des définitions connues :

a et *b*. Dans le plan S, et quelle que soit l'origine O, le *centre* de toute conique est le pôle de la droite I de

l'infini. Et réciproquement, la droite de l'infini est la polaire de tout centre de conique.

c et *d*. Autour du sommet S, et quel que soit le plan originel O, le plan polaire de la droite spéciale J sera dit *plan central* de tout cône. Et réciproquement J est la polaire de tout plan central de cône.

On observera, ce qui est une conséquence de la corrélation *spéciale*, que, dans la géométrie autour du point, un plan n'a pas un pôle, mais une *polaire*; et réciproquement une droite a un *plan polaire*.

7. *Remarque*. — On sait que les couples de diamètres conjugués d'une conique déterminent, autour du centre, une involution dont les asymptotes (*r* ou *i*) sont les *droites doubles* et que leurs points à l'infini déterminent, par suite, sur la droite de l'infini, une involution dont les points à l'infini de la conique sont les *points doubles*. De même, les couples de diamètres conjugués d'un cône situés dans le plan central déterminent, autour du sommet, une involution dont les asymptotes de la section du cône par ce plan sont les *droites doubles*, et leurs plans conjugués passant par la droite spéciale J déterminent autour de cette droite une involution dont les plans tangents au cône passant par J sont les *plans doubles*. Ces considérations justifient les expressions de *droites doubles* et *points doubles* d'une conique, *droites doubles* et *plans doubles* d'un cône qu'il sera commode d'employer comme synonymes d'asymptotes et éléments corrélatifs ; elles dispenseront de la nécessité de recourir à trois mots nouveaux.

8. *a* et *b*. Dans le plan S, deux droites sont dites *conjuguées* par rapport à une conique si elles sont parallèles à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire si elles

joignent un point arbitraire avec les points sur la droite I de l'infini de deux diamètres conjugués. Deux points sont dits *conjugués* s'ils sont les intersections de deux diamètres conjugués et d'une droite arbitraire du plan S.

c et *d*. Deux droites (issues de S) seront dites *conjuguées* par rapport à un cône de sommet S si elles sont les intersections d'un plan arbitraire passant par S par deux plans diamétraux conjugués passant par la droite spéciale J. Deux plans (passant par S) seront dits *conjugués* par rapport au cône s'ils sont les plans de jonction de deux diamètres conjugués et d'une droite arbitraire issue de S.

Il résulte de ces définitions que l'on peut toujours : 1° dans le plan S, mener par un point donné la conjuguée d'une droite donnée et prendre sur une droite donnée le conjugué d'un point donné; 2° autour du sommet S, mener dans un plan donné la conjuguée d'une droite donnée et, par une droite donnée, le plan conjugué d'un plan donné.

9. *Remarque*. — Il importe de ne pas confondre, dans le plan S, les *droites conjuguées* ou *points conjugués*, qui viennent d'être définis, avec les (droites) *polaires conjuguées*, telles que le pôle de l'une soit sur l'autre, ou les (points) *pôles conjugués*, tels que la polaire de l'un passe par l'autre. Les éléments corrélatifs autour de S sont : les *droites polaires conjuguées* telles que le plan polaire de l'une passe par l'autre, et les *plans polaires conjugués* tels que la polaire de l'un soit dans l'autre.

On remarquera que toutes les définitions qui précèdent sont absolument indépendantes de l'origine O ou du plan originel O. Il n'en est pas de même des suivantes.

10. *a* et *b*. Deux coniques du plan S sont *concentriques* si elles ont le même pôle de la droite I de l'infini, corrélative de l'origine. Elles seront dites *conpolaires* si elles ont la même polaire de l'origine O, corrélative de I.

c et *d*. Deux cônes (de même sommet S) seront dits *quasi conpolaires* s'ils ont le même plan polaire de la droite spéciale J, corrélative spéciale du plan originel O. Ils seront dits *quasi concentriques* s'ils ont la même polaire du plan originel O, corrélatif spécial de J.

11. *a* et *b*. Deux coniques sont *homothétiques* si elles coupent la droite I de l'infini aux mêmes points (*r* ou *i*). Elles seront dites *homotangentes* si elles ont les mêmes tangentes (*r* ou *i*) issues de l'origine O.

c et *d*. Deux cônes (de même sommet S) seront dits *quasi homotangents* s'ils ont les mêmes plans tangents (*r* ou *i*) passant par la droite spéciale J. Ils seront dits *quasi homothétiques* s'ils ont les mêmes génératrices (*r* ou *i*) dans le plan originel O.

12. *Remarque.* — Pour les coniques (ou quadriques) conpolaires ou homotangentes, on peut voir la brochure : *La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre* (Gauthier-Villars; 1898). Mais on observera que, pour les cônes *de même sommet*, les mots *conpolaire*, *concentrique*, *homothétique* ou *homotangent* n'ont pas la même signification que pour les quadriques quelconques (y compris les cônes *de sommet différent*). Ils définissent des conditions *spéciales à la géométrie autour du point*. C'est ce qui explique l'emploi du préfixe *quasi* pour éviter toute confusion.

Ceci posé, passons à diverses applications.

13. *a*. Dans le plan S, si, par un point P pris sur

une conique C, on mène deux droites PA, PB conjuguées par rapport à une autre conique C′, la droite AB de jonction des seconds points communs à ces droites et à C passe par un point fixe (théorème de Frégier généralisé).

b. Dans le plan S, si, sur une droite P tangente à une conique C, on prend deux points PA, PB conjugués par rapport à une autre conique C′, le point AB d'intersection des secondes tangentes menées par ces points à C décrit une droite fixe.

c. Si, dans un plan P, tangent à un cône C de sommet S, on mène deux droites PA, PB (passant par S) et conjuguées par rapport à un autre cône C′ (de même sommet), la droite AB d'intersection des seconds plans tangents menés par ces droites à C engendre un plan fixe.

d. Si, par une droite P, génératrice d'un cône C, on mène deux plans PA, PB conjugués par rapport à un autre cône C′, le plan AB de jonction des secondes droites communes à ces plans et à C passe par une droite fixe.

14. *a*. Dans le plan S, le lieu des points M par lesquels on peut mener à une conique C deux tangentes conjuguées par rapport à une autre conique C′, est une conique C″, concentrique à C et homothétique à C′ (théorème de Monge généralisé).

b. Dans le plan S, l'enveloppe des droites M déterminées par deux points d'une conique C conjugués par rapport à une autre conique C′, est une conique C″, conpolaire à C et homotangente à C′.

c. Autour du point S, l'enveloppe des plans M déterminés par deux génératrices d'un cône C conjuguées par rapport à un autre cône C′ est un cône C″, quasi conpolaire à C et quasi homotangent à C′.

d. Le lieu des droites M, par lesquelles on peut mener deux plans tangents à un cône C et conjuguées par rapport à un autre cône C′, est un cône C″, quasi concentrique à C et quasi homothétique à C′.

15. On peut appliquer les mêmes procédés de quadruplement aux théorèmes concernant l'hyperbole équilatère ou les polaires conjuguées. Par exemple, le théorème connu : *Le centre d'une hyperbole équilatère se trouve sur le cercle circonscrit à tout triangle polaire conjugué,* donne naissance au groupe suivant :

a. Le centre de toute conique C dont les asymptotes (ou droites doubles, 7) sont conjuguées par rapport à une conique C′ se trouve sur toute conique C″, homothétique à C′ et circonscrite à un triangle polaire conjugué (par rapport à C).

b. La polaire de l'origine, par rapport à toute conique C, dont les points doubles sont conjugués par rapport à une conique C′, est tangente à toute conique C″, homotangente à C′ et inscrite à un triangle polaire conjugué (par rapport à C).

c. Le plan central de tout cône C, dont les droites doubles sont conjuguées par rapport à un autre cône C′, est tangent à tout cône C″, quasi homotangent à C′ et inscrit à un trièdre polaire conjugué (par rapport à C).

d. La polaire du plan originel, par rapport à tout cône C dont les plans doubles sont conjugués par rapport à un cône C′, est génératrice de tout cône C″, quasi homothétique à C′ et circonscrit à un trièdre polaire conjugué (par rapport à C).

16. Pour transformer des théorèmes concernant la parabole, il faut tenir compte des conditions ci-après : 1° la parabole est une conique tangente à la droite I de

l'infini ; 2° sa corrélative, dans le plan, est une conique quelconque passant par l'origine ; 3° le premier cône (corrélatif direct) est tangent au plan originel ; 4° le deuxième cône (corrélatif spécial) admet pour génératrice la droite spéciale J.

On peut même trouver ainsi des corrélations inattendues. Par exemple, les théorèmes du point de Frégier pour une conique quelconque et de la directrice d'une parabole considérée comme sa ligne orthoptique ou droite de Monge, paraissent indépendants. Mais si, après les avoir énoncés convenablement, on les généralise par homographie, on reconnaît qu'ils sont corrélatifs. En effet, dans le théorème (13, *a*), la conique C′, n'intervenant que par ses directions conjuguées, peut avoir son centre en un point arbitraire du plan. On peut donc énoncer ainsi ce théorème :

a′. Étant données une conique C passant par un point origine O et une conique C′ dont O est le centre (ou pôle de I), l'enveloppe D des droites de jonction des points A et B de C conjugués par rapport à C′ est un point (ligne de 1re classe). Le corrélatif est :

b′. Étant données une conique C tangente à la droite I (ou parabole) et une conique C′ dont la polaire du centre est I (c'est-à-dire une conique quelconque), le lieu D des points d'intersection des tangentes A et B à C conjuguées par rapport à C′ est une droite (ligne du premier ordre).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les théorèmes *c′* et *d′*.

Exemples de corrélation avec éléments moyens.

17. Je me bornerai aux définitions nécessaires pour arriver à un exemple caractéristique : le quadruplement du théorème du cercle d'Euler.

a. Le milieu d'un segment AB d'une droite D est le centre des moyennes distances, ou, par abréviation, le *point moyen* du couple de points (A, B). Il est le conjugué harmonique du point à l'infini de D, ou, plus simplement, le conjugué de ce point par rapport au couple (A, B) considéré comme courbe de deuxième classe.

b. La conjuguée de la droite de jonction de l'origine O avec un point D, par rapport à un couple (A, B) de droites passant par D, lequel constitue une courbe du deuxième ordre, sera dite la *droite moyenne* du couple (A, B).

c. Le plan conjugué du plan de jonction d'une droite D (passant par S) avec la droite spéciale J, par rapport à un couple (A, B) de plans passant par D et considéré comme cône du deuxième ordre, sera dit le *plan moyen* du couple (A, B).

d. La droite conjuguée de la droite d'intersection du plan originel O avec un plan D passant par S, par rapport à un couple (A, B) de droites issues de S et situées dans le plan D, ce couple étant considéré comme un cône (spécial par perspective) de deuxième classe, sera dite la *droite moyenne* du couple de droites (A, B).

18. *a.* Les droites (qui seront dites *quasi-hauteurs*), conjuguées par rapport à une conique Σ, des côtés d'un triangle et menées par les sommets opposés, se coupent en un point H, qui sera dit *quasi-orthocentre* du triangle.

b. Les points (corrélatifs des quasi-hauteurs et qui, par abréviation, seront dits *points-hauteurs*) conjugués par rapport à une conique Σ des sommets d'un triangle et situés sur les côtés opposés, sont sur une même droite H, que j'appellerai l'*orthocentrale* du triangle.

c. Autour du sommet S, les droites (qui seront dites *quasi-hauteurs* du trièdre), conjuguées par rapport à un cône Σ des arêtes d'un trièdre et situées dans les faces opposées sont dans un même plan H, que j'appellerai le *plan orthocentral* du trièdre.

d. Les plans (qui seront dits *plans-hauteurs*), conjugués par rapport à un cône Σ des faces d'un trièdre et passant par les arêtes opposées, se coupent suivant une même droite H, que j'appellerai la *droite orthocentrale* du trièdre.

Les théorèmes d'Euler, Feuerbach, etc. donnent dès lors naissance au groupe suivant :

19. *a*. Les points moyens des couples de sommets (A, B, C) d'un triangle, les points d'intersection de ses côtés avec les quasi-hauteurs par rapport à une conique *circonscrite* Σ de centre K, les points moyens des couples (H, A), (H, B), (H, C), sont neuf points d'une même conique Σ′, homothétique à Σ et dont le centre K′ est le point moyen du couple (H, K). Cette conique Σ′ touche les quatre coniques (*r* ou *i*), inscrites au triangle ABC et homothétique à Σ (et Σ′); elle est le lieu des centres des coniques circonscrites à ABC et dont les droites doubles (ou asymptotes) sont conjuguées par rapport à Σ, coniques qui passent toutes par le quasi-orthocentre H, etc.

b. Les droites moyennes des couples de côtés (A, B, C) d'un triangle, les droites de jonction avec les sommets opposés des points hauteurs par rapport à une conique *inscrite* Σ dont K est la polaire de l'origine, les droites moyennes des couples (H, A), (H, B), (H, C) sont neuf droites tangentes à une même conique Σ′, homotangente à Σ, dont la polaire K′ de l'origine est la droite moyenne du couple (H, K). Cette conique Σ′ touche les quatre

coniques (r ou i), circonscrites au triangle (A, B, C) et homotangentes à Σ. Elle est l'enveloppe des polaires de l'origine par rapport aux coniques inscrites à (A, B, C) et dont les points doubles sont conjugués par rapport à Σ, coniques qui touchent toutes l'orthocentrale H du triangle, etc.

c. Les plans moyens des couples de faces (A, B, C) d'un trièdre, les plans de jonction avec les arêtes opposées des quasi-hauteurs par rapport à un cône *inscrit* Σ dont K est le plan central, les plans moyens des couples (H, A), (H, B), (H, C), sont neuf plans tangents à un même cône Σ', quasi-homotangent à Σ, dont le plan central K′ est le plan moyen du couple (H, K). Ce cône Σ' touche les quatre cônes (r ou t) circonscrits au trièdre (A, B, C) et quasi homotangents à Σ; il est l'enveloppe des plans centraux des cônes inscrits au trièdre (A, B, C) et dont les droites doubles sont conjuguées par rapport à Σ, cônes qui touchent tous le plan orthocentral H, etc.

d. Les droites moyennes des couples d'arêtes (A, B, C) d'un trièdre, les droites d'intersection des faces avec les plans hauteurs par rapport à un cône Σ *circonscrit* à ABC, dont la polaire du plan originel est K, les droites moyennes des couples (H, A), (H, B), (H, C) sont neuf génératrices d'un même cône Σ', quasi homothétique à Σ, la polaire K′ du plan originel étant la droite moyenne du couple (H, K). Ce cône Σ' touche les quatre cônes (r ou i) inscrits au trièdre ABC et quasi homothétiques à Σ. Il est le lieu des polaires du plan originel par rapport aux cônes circonscrits à ABC et dont les plans doubles sont conjugués par rapport à Σ, cônes qui admettent tous pour génératrice la droite orthocentrale H, etc.

20. Les exemples qui précèdent suffisent pour mon-

trer le parti que l'on peut tirer du principe de dualité pour la transformation des théorèmes projectifs, en comprenant sous cette dénomination non seulement les théorèmes purement descriptifs, mais tous ceux dans lesquels interviennent des éléments rectangulaires ou conjugués, des milieux, des bissectrices, etc. Le point de départ de la généralisation des *bissectrices* est évident : il suffit de remarquer que les bissectrices d'un couple de droites étant ses axes (c'est-à-dire les diamètres à la fois conjugués par rapport au couple et à un cercle) sont un cas particulier d'un système de diamètres (r ou i) à la fois conjugués par rapport au couple et à une conique quelconque.

Bien d'autres considérations resteraient à présenter avant d'aborder les questions *métriques*. Je me bornerai à quelques indications sommaires sur un moyen important de généralisation homographique.

Généralisation des théorèmes initiaux.

21. Si l'on en excepte les propriétés purement descriptives (3, 4), *les théorèmes initiaux* (a) *ne sont pas des théorèmes généraux*. En effet, la notion des coniques homotangentes est générale, parce qu'elle considère une famille de coniques tangentes à deux droites quelconques données (r ou i), se croisant en une origine arbitraire (et par conséquent *générale*). Mais il n'en est pas de même pour les coniques homothétiques, famille de coniques passant toutes par deux points J_1 et J_2 (r ou i) donnés sur la droite *particulière* I de l'infini. L'homographie permet de substituer aux points J_1 et J_2 deux points arbitraires M_1 et M_2 (r ou i) d'une droite *générale* Δ et de constituer ainsi une famille de coniques (que l'on pourrait appeler *homoponctuelles*)

et qui sont les vraies corrélatives des coniques homotangentes.

Le point moyen du couple (A, B), conjugué du point d'intersection de AB avec la droite particulière I, est un cas particulier du conjugué par rapport à ce couple du point d'intersection de AB avec Δ.

Deux diamètres conjugués sont les droites joignant le pôle de I à deux points L_1 et L_2 de l'involution dont J_1 et J_2 sont les points doubles; ce sont deux *polaires conjuguées* dont les pôles L_1 et L_2 sont sur I; deux droites conjuguées joignent un point arbitraire aux points L_1 et L_2. Par suite, deux diamètres conjugués sont un cas particulier de deux *polaires conjuguées* dont les pôles N_1 et N_2 sont des points de l'involution portée par Δ et ayant M_1 et M_2 pour points doubles; deux droites conjuguées sont un cas particulier de deux droites joignant un point arbitraire du plan aux pôles conjugués N_1 et N_2, situés sur Δ.

22. Ceci posé, laissant au lecteur le soin de définir les éléments corrélatifs des précédents et d'énoncer les nouveaux théorèmes *b*, *c*, *d*, on voit, par exemple, que :

1° Le théorème (14, *a*, Monge) se généralise ainsi : étant données une droite Δ, une conique C ayant K pour pôle de Δ et une conique C′ coupant cette droite en M_1 et M_2, le lieu des points M par lesquels on peut mener à C deux tangentes telles que leurs points d'intersection N_1, N_2 avec Δ soient pôles conjugués par rapport à C′, est une conique C″, ayant K pour pôle de Δ et homoponctuelle à C′ (c'est-à-dire passant par M_1 et M_2).

2° Le théorème (19, *a*, Euler et Feuerbach) est un cas particulier du suivant : Étant donné un triangle ABC

et une conique Σ circonscrite et coupant la droite donnée Δ aux points (r ou i) M_1 et M_2, K étant le pôle de Δ; soient A_1, B_1, C_1 les intersections des côtés avec Δ, et A_2, B_2, C_2 les conjugués de ces points par rapport aux couples de sommets :

La conique ($A_2 B_2 C_2 M_1 M_2$) ou Σ' coupe les côtés en des points A_3, B_3, C_3 tels que les droites AA_3, BB_3, CC_3 (qui concourent en un point H) rencontrent Δ en des points A_4, B_4, C_4, pôles respectivement conjugués par rapport à Σ de A_1, B_1, C_1. Les seconds points communs à AA_3, BB_3, CC_3 et à Σ' sont les conjugués des points d'intersection de Δ avec ces droites par rapport aux couples (H, A), (H, B), (H, C). Le pôle K' de Δ par rapport à Σ' est le conjugué du couple (H, K) par rapport au point d'intersection de HK et de Δ. La conique Σ' touche les quatre coniques (r ou i) tangentes aux côtés de ABC et homoponctuelles à Σ et Σ' (c'est-à-dire passant par M_1, M_2), etc.

23. Il resterait à étudier les théorèmes qui comportent des *relations métriques* et qui, jusqu'à présent, ont semblé mettre en défaut la généralité d'application du principe de dualité. On peut cependant arriver à cette application en faisant usage des principes dont j'ai exposé les bases dans une brochure précitée. Mais ces bases ont besoin d'être développées et précisées. Ce sera l'objet d'un prochain article.

ERRATA.

Tome XVI, 1897. — Page 142, ligne 8 en remontant, *au lieu de* $y = 2z - 1$, *lisez* $y^2 = 2z - 1$.

Page 571, ligne 6, *au lieu de* $y = av$, *lisez* $y = uv$.

Tome XVII, 1898. — Page 307, *au lieu de* [**R8γ**], *lisez* [**R8c**].

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Paris.

Calcul différentiel et Calcul intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un point d'une surface,* P *le point de rencontre du plan tangent en* M *à cette surface avec l'axe* Oz, Q *le point de rencontre de la droite* MP *avec le plan* xOy.

On demande :

1° *De trouver l'équation générale des surfaces* (Σ) *telles que le point* P *soit le milieu de* MQ;

2° *De démontrer que les lignes asymptotiques de ces surfaces s'obtiennent par une quadrature (on pourra prendre pour paramètres variables* z *et* $\frac{y}{x}$;

3° *De trouver parmi les surfaces précédentes la surface* (Σ), *la plus générale, dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont les intersections de cette surface et des paraboloïdes* $\frac{xz}{y} = C$;

4° *De démontrer que ces lignes asymptotiques sont des courbes unicursales.*

II. *Soit*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

une équation différentielle du premier ordre, à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ pour que les courbes représentées par l'intégrale générale $F(x, y) = C$ *forment une famille de courbes parallèles? Si cette condition est vérifiée, on peut intégrer l'équation* (1) *par une quadrature.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{16 - (\cos x)^4}.$$

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Démontrer que toutes les surfaces pour lesquelles les sections planes, déterminées par des plans parallèles aux plans coordonnés des* xz *et des* yz, *forment deux familles de courbes conjuguées sont représentées par une équation de la forme*

$$z = \varphi(x) + \psi(y); \tag{1}$$

2° *En admettant que les axes soient rectangulaires, démontrer que l'élément linéaire de ces surfaces peut toujours être ramené à la forme*

$$dS^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2a(\alpha)b(\beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{2}$$

où α *est fonction de* x *et* β *de* y;

3° *Déterminer toutes celles de ces surfaces qui admettent le même élément linéaire donné par la formule précédente* (2);

4° *Prouver que, parmi les surfaces représentées par l'équation* (1), *il existe des surfaces minima et donner l'équation de ces surfaces.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Appliquer les formules de*

M. Schwarz à la détermination de la surface minima admettant pour ligne géodésique la courbe plane définie par les deux équations

$$x = 3\alpha - \alpha^3, \qquad y = 0, \qquad z = 3\alpha^2.$$

Construire les sections de cette surface par les plans coordonnés.

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface.

Analyse supérieure.

Épreuve écrite. — I. *Qu'appelle-t-on* groupe *d'une équation algébrique? Démontrer sa propriété fondamentale.*

II. *Établir la formule qui exprime, à partir d'une valeur suffisamment grande de k, le nombre des conditions pour qu'une surface de degré k passe par une courbe gauche de degré n, de genre p, ayant t points triples.*

Épreuve pratique. — *Quel est le genre de la courbe*

$$y^3 = x(x-1)(x-a)^2$$

où a désigne une constante différente de 0 et de 1?

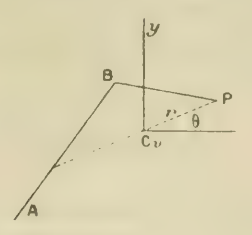
Former l'expression générale des intégrales de première espèce relatives à cette courbe.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *On lance, sur un plan horizontal parfaitement poli, un système matériel constitué :*

1° *Par une tige rigide* AB *rectiligne homogène, d'épaisseur infiniment petite, de longueur $2l$ et de masse m;*

2° *Par un point matériel* P *de même masse* m, *rattaché à l'extrémité* B *de la tige par un fil inextensible et sans masse de longueur* l.



On demande :

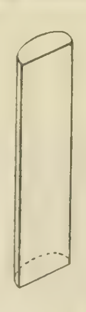
1° *Le mouvement du centre de gravité* G *du système ;*

2° *Le mouvement du système par rapport à des axes* Gx *et* Gy *de directions fixes passant par le centre de gravité.*

On appellera r *et* θ *les coordonnées polaires du point* P *par rapport aux axes* Gx *et* Gy

$$\mathrm{GP} = r, \qquad x\mathrm{GP} = \theta.$$

Épreuve pratique. — *On considère un cylindre droit homogène dont la masse est* 10^{gr}, *dont la hau-*



teur est 10^{cm} *et dont la base est un demi-cercle de* 1^{cm} *de rayon.*

Trouver :

1° *Le centre de gravité de ce cylindre ;*

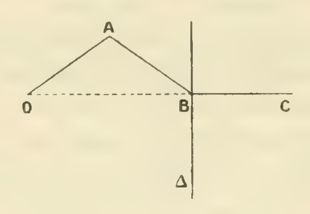
2° *Les directions des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ;*

3° *Les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité.*

Mécanique physique.

Épreuve écrite. — I. Question de cours. — *Mécanisme de la distribution de la vapeur dans le cylindre. Décrire les phases que traverse la tension de la vapeur d'un même côté du piston pendant une oscillation complète. Tiroir. Excentrique. Coulisse.*

II. Problème. — *On considère le dispositif formé d'une manivelle* OA, *tournant autour de l'axe* O *et reliée par la bielle* AB *à une glissière rectiligne* BC *dont le prolongement passe au point* O. *Soit* Δ *la perpendiculaire élevée en* B *à la glissière* BC. *Quelle est, par rapport à la manivelle* OA, *l'enveloppe* E *des positions relatives de la droite* Δ?



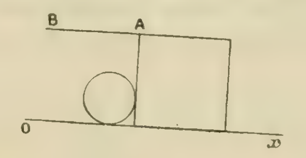
D'après le résultat obtenu, pourrait-on remplacer la bielle AB *par une came solidaire de la manivelle* OA *et agissant par contact direct sur un cadre solidaire de la glissière ?*

Marseille.

Certificat de Mécanique.

Composition de Mécanique. — *Dans un plan vertical une droite fixe* Ox *fait avec l'horizontale un angle dont la tangente est* $\frac{1}{10}$.

Sur cette droite Ox *peut glisser une plaque pesante, carrée et homogène de côté* $4a$, *dont le sommet le plus haut* A *est attaché à l'extrémité d'un fil élastique* AB *de masse négligeable, dont l'autre extrémité* B *est fixe. La ligne* AB *est parallèle à* Ox. *A l'état naturel, la longueur du fil est* $4a$. *Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension, et sa longueur double sous une tension égale au poids de la plaque.*



Sur la même droite Ox *repose un disque pesant et homogène, de même poids que la plaque et de rayon* a. *Ce disque s'appuie, en outre, contre la plaque.*

La droite Ox *est dépolie, et le coefficient de son frottement contre le disque ou contre la plaque est* $\frac{1}{10}$. *Il n'y a pas de frottement entre le disque et la plaque.*

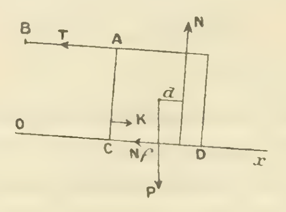
1° *Trouver dans quelles positions ce système est en équilibre. Comparer ces positions avec celle qu'on obtient en supprimant le frottement sur* Ox;

2° *Trouver le mouvement du système en supposant qu'à l'instant initial les vitesses sont nulles, et que le fil est à l'état naturel.*

SOLUTION.

Soit x l'allongement du fil AB compté à partir du point où le fil est à l'état naturel. Cette variable fixera la position de la plaque, si celle-ci reste sur Ox. La tension du fil correspondant à l'allongement x est évidemment $T = \frac{Px}{4a}$.

Équations d'équilibre. — On appelle N la réaction sur la plaque; elle passe à une distance d du centre de la plaque. Cette distance est naturellement inférieure à



$2a$, mais elle peut être positive ou négative. Nf est le frottement. On appelle K la réaction du disque sur la plaque, et P le poids de la plaque. On a les trois conditions

$$P\cos\alpha - N = 0,$$
$$P\sin\alpha + K = Nf + T,$$
$$Nd + T \times 2a + Ka = Nf \times 2a.$$

En outre, l'une des équations d'équilibre du disque est

$$P\sin\alpha = K.$$

On tire de là

$$8a\sin\alpha - 4af\cos\alpha - x = 0,$$
$$2d\cos\alpha + 2a\sin\alpha - 2af\cos\alpha + x = 0.$$

Équilibre sans frottement. — Faisant $f = 0$, on a

$$x = 8a \sin\alpha = 0,8a,$$
$$d = -\frac{x + 2a\sin\alpha}{2\cos\alpha} = -0,5a,$$

en prenant approximativement $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ égaux à 0,1 et à 0,9.

La réaction est placée du côté du disque à peu près à égale distance du disque et du centre de la plaque.

Équilibre avec frottement. — Il suffit que l'on ait $|f| < 0,1$.

Or on a

$$x = (0,8 - 3,6f)a,$$
$$d = \frac{3,6f - 0,8 + 1,8f - 0,2}{1,8}a = \frac{5,4f - 1}{1,8}a.$$

On tire de là le Tableau des positions d'équilibre

$$f = -0,1, \quad d = -0,8a, \quad x = 1,16a,$$
$$f = 0, \quad d = -0,5a, \quad x = 0,8a,$$
$$f = +0,1, \quad d = -0,3a, \quad x = 0,44a.$$

Sur une droite prenons OA_1, OA_0, OA_2 respective-

O A₁ A₀ A₂

ment égaux aux valeurs de x, on peut dire que, si le sommet C de la plaque :

Est entre A_1 et A_0, la plaque est en équilibre et tend à descendre puisque f est positif;

Est entre A_0 et A_2, la plaque est en équilibre et tend à remonter puisque f est négatif.

En dehors de l'intervalle A_1A_2 il n'y a pas équilibre, parce que le coefficient de frottement n'est que de $\frac{1}{10}$.

En prenant les moments par rapport aux sommets C ou D de la plaque, situés sur Ox, on voit que la plaque n'est jamais dans le cas de basculer dans ses positions d'équilibre. Le calcul est facile.

Mouvement sans frottement. — Soit M la masse de la plaque, de sorte que $P = Mg$, on aura, d'après le principe du centre de gravité, et d'après celui des aires, et en changeant le signe de d,

$$N = P\cos\alpha,$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P\sin\alpha - K - \frac{Px}{4a} - Nf,$$

$$Nd - Nf \times 2a = \frac{Px}{4a} \times 2a - Ka.$$

Le disque glissant, puisqu'il n'y a pas de frottement, on a, pour le mouvement du disque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = K - P\sin\alpha;$$

on tire de ces équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{8a}(8a\sin\alpha - x),$$

d'où

$$x = 8a\sin\alpha\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{8a}}\,t\right),$$

en tenant compte des conditions initiales. On voit que, quand t augmente, x augmente, c'est-à-dire que la plaque descend. Sa vitesse est nulle au temps $t = \pi\sqrt{\frac{8a}{g}}$, alors $x = 16a\sin\alpha = 1{,}6a$. Cette position étant différente du point A_0, il n'y a pas équilibre. D'ailleurs, il n'y a pas lieu de rechercher si la plaque bascule. La plaque remonte donc et le mouvement devient oscillatoire.

Mouvement avec frottement. — Faisons une hypothèse. Supposons que le disque roule sans glisser. Appelons N′ la réaction normale sur le disque, et f' le coefficient de frottement du disque sur la droite Ox. Nous aurons les équations

$$N' = P \cos \alpha,$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = P \sin \alpha - N' f' - K,$$

$$M \frac{a^2}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = N' f' \times a,$$

et, comme le disque roule, on a

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 N' f',$$

d'où l'on déduit, avec les équations du mouvement de la plaque,

$$2 N' f' = P \sin \alpha - N' f' - K,$$

$$2 N' f' = P \sin \alpha - K - \frac{P x}{4 a} - N' f,$$

$$f' = \frac{2 \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{x}{4 a}}{5 \cos \alpha}.$$

Il faut que f' soit inférieur à 0,1 en valeur absolue. Or, à l'instant initial, on a

$$f' = \frac{0,2 - 0,09}{4,5} = 0,02;$$

donc l'hypothèse est fondée au début. On peut donc écrire sans risques

$$5 N' f' = 2 M g \sin \alpha - \frac{P x}{4 a} - M f g \cos \alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2 g}{5} \left(2 \sin \alpha - f \cos \alpha - \frac{x}{4 a} \right).$$

On a en intégrant, et dans les circonstances proposées,

$$x = 4a(2\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{10a}}\,t\right).$$

La plaque commence à descendre, et le disque suit en roulant autour de son centre. Ce mouvement persiste jusqu'à ce que $|f'| = 0,1$. Or

$$f' = \frac{0,44a - x}{18a};$$

donc, déjà tant que $x < 0,44\,a$, f' reste inférieur à $0,1$. Ensuite, il faudra que l'on ait

$$x < 0,44a - 0,1 \times 18a \qquad \text{ou} \qquad x < 2,24a.$$

Or, l'équation du mouvement nous montre que la plus grande valeur de x est atteinte au temps $t = \pi\sqrt{\frac{10a}{g}}$ et est égale à $8a\cos\alpha(2\tan g\alpha - f)$ ou $0,72a$.

Donc, le même mouvement persiste jusqu'à cette valeur de x. Mais cette valeur est dans le Tableau des positions d'équilibre. Donc le système s'arrête après ce temps. L'équilibre est alors très stable. Car cette position est voisine de celle où il y aurait équilibre, même sans frottement.

Épreuve pratique. — *Deux bassins sont en communication par un tuyau horizontal de* 10^{cm} *de diamètre et de* 2^{km} *de long.*

La surface libre du premier bassin est à 10^{m} *au-dessus du tuyau et la surface libre du deuxième bassin est à* 5^{m} *au-dessus du tuyau.*

Sur ce tuyau, à égale distance des deux bassins, est branché un deuxième tuyau de 5^{cm} *de diamètre et de*

4^{km} de long. L'extrémité de ce dernier tuyau est à 10^m au-dessous du tuyau horizontal.

Examiner si le bassin inférieur recevra ou enverra de l'eau.

Dire quel sera le débit du tuyau inférieur.

Donner les niveaux piézométriques dans les tuyaux.

Certificat d'Astronomie.

Composition. — *Théorie de l'aberration de la lumière d'après Bradley.*

Établir les formules qui font connaître l'effet de l'aberration annuelle :

1° *En ascension droite et en déclinaison ;*

2° *En longitude et en latitude.*

En déduire l'effet de l'aberration diurne en ascension droite et en déclinaison.

On ne parlera pas de l'aberration planétaire.

Épreuve pratique. — *Étant données la durée* T *de la révolution sidérale d'une planète et l'excentricité* e *de son orbite, on demande de calculer l'anomalie excentrique* E, *à l'époque* $t_0 + t$, t_0 *désignant l'époque du passage au périhélie.*

Données numériques

$$T = 1686,640.$$
$$t = 637,473.$$
$$e = 0,2370266.$$

T *et* t *sont exprimés en jours solaires moyens.*

Solution.

Appelant μ le moyen mouvement diurne, M l'ano-

malie moyenne,

$$\mu = \frac{1296000''}{1686,640}, \qquad M = \mu t, \qquad E - \frac{e}{\sin 1''} \sin E = M, \qquad \Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E}.$$

Log	
1296000	6,1126050
637,473	2,8044618
1 : 1686,640	$\bar{4}$,7729776
M	5,6900444
e	$\bar{1}$,3747971
1 : sin 1″	5,3144251
e : sin 1″	4,6892222
sin M	$\bar{1}$,842
e'' sin M	4,531
sin E_1	$\bar{1}$,7586
e'' sin E_1	4,4478
sin E_2	$\bar{1}$,7692
e'' sin E_2	4,4584
sin E_3	$\bar{1}$,7686966
e'' sin E_3	4,4579188
ΔM	−1,68726
1 − e cos E	0,07624
cos E	−$\bar{1}$,90823
− e cos E	+$\bar{1}$,28303
ΔE	−1,61102
sin E_4	$\bar{1}$,7688151
e'' sin E_4	4,4580373
sin E_5	$\bar{1}$,7688150

$$M = E - (4,6892222) \sin E = 489828'',89 = 136^\circ 3' 48'',89$$

	E	e'' sin E	E − e'' sin E	− ΔM = E − e sin E − M
E_1	145°	7° 46′	137° 14′	+ 1° 14′
E_2	144°	7° 59′	136° 1′	− 4
E_3	144° 3′ 0″,00	7° 58′ 22″,44	136° 4′ 37″,56	+ 0′ 48″,67
ΔE_3	− 40″,83			
E_4	144° 2′ 19″,17	7° 58′ 30″,27	136° 3′ 48″,90	− 0″,01

Résultat.

$$\mathrm{E} = 144^{\circ}\,2'\,19''.16.$$

Certificat d'Analyse infinitésimale.

Composition. — 1° *On forme avec des quantités réelles l'expression*

$$\mathrm{A}_1 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3),$$

ainsi que deux autres quantités analogues A_2 *et* A_3 *en permutant les indices. On pose ensuite*

$$\int \left(\frac{\mathrm{A}_1}{z - a_1} + \frac{\mathrm{A}_2}{z - a_2} + \frac{\mathrm{A}_3}{z - a_3} \right)^2 dz = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1} = \mathrm{Z},$$

l'intégrale étant calculée le long d'un chemin quelconque décrit dans son plan par la variable indépendante $z = x + y\sqrt{-1}$. *Montrer* a priori *que cette intégrale n'a aucun terme transcendant et calculer ensuite* X *et* Y *en fonction de* x *et de* y.

2° *Vérifier que le rapport* $\frac{d\mathrm{Z}}{dz}$ *est une quantité rationnelle en* z, *et, en combinant ce rapport avec celui qu'on obtient en changeant le signe de* $\sqrt{-1}$, *conclure que si l'on considère deux courbes correspondantes décrites dans leurs plans respectifs par les deux points* Z *et* z, *le rapport* $\frac{d\mathrm{S}}{ds}$ *des arcs élémentaires* $d\mathrm{S}$ *et* ds *de ces courbes est une quantité réelle rationnelle en* x *et* y.

3° *Si les cosinus directeurs de l'arc* S *s'expriment rationnellement en* X *et* Y, *il en sera de même des cosinus directeurs de l'arc* s *qui s'exprimeront rationnellement en* x *et* y.

Pour la solution de la question d'analyse dans ses parties intéressantes, voir *une Note de M. P. Appell, insérée au numéro de novembre* 1896 *dans les* Nouvelles Annales, *sous le titre* Exercice sur les courbes de direction.

Épreuve pratique. — *On considère la suite des plans perpendiculaires à une même droite, et l'on définit la position de chacun de ces plans par sa distance z à une origine fixe prise sur la droite.*

On considère ensuite une surface telle que chacun des plans précédents la coupe suivant une courbe fermée dont l'aire ait pour expression le trinome du second degré à coefficients constants

$$az^2 + bz + c.$$

1° *Calculer le volume* V *compris entre la surface et deux des plans, connaissant la distance h de ces deux plans, l'aire σ de la section faite par un plan équidistant des deux plans donnés et le seul coefficient a du trinome.*

2° *De la formule trouvée pour* V *tirer la valeur de h exprimée en radicaux, dans le cas seulement où le coefficient a est positif.*

3° *Faire le calcul de h, sachant que l'on a*

$$a = -12, \qquad V = 488^{mc}, \qquad \sigma = 240^{mq}.$$

Solution.

On doit appliquer la formule de Cardan à l'équation du troisième degré

$$ah^3 + 12\sigma h - 12V = 0.$$

On trouve dans l'exemple numérique

$$h = 2^{m}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1673.

(1894, p. 5*.)

Par un point fixe situé sur une circonférence de cercle, on mène deux cordes rectangulaires. Sur chacune de ces cordes, comme diamètre, on décrit respectivement les cercles c, c'. Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles c, c' est une strophoïde droite.

(Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Lez.

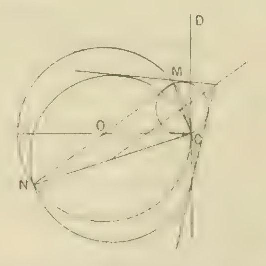
On sait que les coordonnées des centres de similitude de deux cercles

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=r'^2$$

sont données par les équations

$$(1)\qquad x=\frac{\alpha' r\mp\alpha r'}{r\mp r'},\qquad y=\frac{\beta' r\mp\beta r'}{r\mp r'}.$$

Or, soient O le centre du cercle de rayon 2R et C le point fixe de la circonférence.



Si l'on prend OC pour axe des X et une perpendiculaire CD pour axe des Y, le cercle O aura pour équation

$$(x+2R)^2+y^2=4R^2,\qquad \text{ou}\qquad x^2+y^2+4Rx=0.$$

et un diamètre mobile, $y = \text{tang}\,\mu(x - 2R)$, rencontrera cette circonférence en deux points ayant pour coordonnées

$$\text{M}, \qquad x = -2R(1 - \cos\mu), \qquad y = 2R\sin\mu,$$
$$\text{N}, \qquad x = -2R(1 + \cos\mu), \qquad y = -2R\sin\mu.$$

Par suite, les cercles c, c' décrits sur CM et CN comme diamètres, seront représentés par

$$(x + R - R\cos\mu)^2 + (y - R\sin\mu)^2 = 2R^2(1 - \cos\mu),$$
$$(x + R + R\cos\mu)^2 + (y + R\sin\mu)^2 = 2R^2(1 + \cos\mu).$$

Or, il s'agit de prouver que les points de rencontre de leurs tangentes communes, ou les centres de similitude, sont sur une strophoïde. Pour cela, remarquant qu'on peut écrire

$$\alpha = -R(1 - \cos\mu), \qquad \beta = R\sin\mu, \qquad r = R\sqrt{2(1 - \cos\mu)},$$
$$\alpha' = -R(1 + \cos\mu), \qquad \beta' = -R\sin\mu, \qquad r' = R\sqrt{2(1 + \cos\mu)},$$

les équations (1) deviennent après réductions

$$x = \mp R\sin\mu, \qquad y = R\frac{\sin\mu}{\cos\mu}(1 \pm \sin\mu).$$

Éliminant la variable μ entre ces égalités, on obtient l'équation

$$(R - x)y^2 = (R + x)x^2$$

qui est celle d'une strophoïde droite ayant son point double à l'origine C.

Autre solution de M. J. Destoux.

Question 1697.

(1895, p. 38*.)

Étant donnés, sur une conique, deux groupes de trois points a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3, s'il existe une conique inscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et circonscrite au triangle $b_1b_2b_3$, il existe une seconde conique inscrite au triangle $b_1b_2b_3$ et circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$.

Étant donné un triangle, chaque point d'intersection du cercle circonscrit avec l'un des cercles inscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle.

(G. Humbert.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Les deux triangles $a_1a_2a_3$ et $b_1b_2b_3$ étant inscrits dans la conique C, il existe une conique Σ pour laquelle les deux triangles sont conjugués.

S'il existe une conique qui soit inscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et circonscrite au triangle $b_1b_2b_3$, il suffira de prendre sa polaire réciproque par rapport à Σ, elle sera inscrite au triangle $b_1b_2b_3$ et circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$.

Soient $a_1a_2a_3$ un triangle quelconque, A son cercle circonscrit, B un de ses cercles inscrits et représentons par b_1 un des points de coupe de ces deux circonférences, et par b_2, b_3 les ombilics du plan. Les deux triangles $a_1a_2a_3$ et $b_1b_2b_3$ sont inscrits dans la conique A; en outre, la conique B est inscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et circonscrite au triangle $b_1b_2b_3$. Il existe donc une conique C, circonscrite au triangle $a_1a_2a_3$ et tangente aux côtés du triangle $b_1b_2b_3$. La droite b_2b_3 étant à l'infini, C est une parabole admettant b_1 comme foyer, puisque b_1b_2 et b_1b_3 sont les droites isotropes passant par b_1 et tangentes à C.

Question 1699.

1895, p. 87.

On considère le quadrilatère formé par les quatre pieds des normales abaissées sur une ellipse d'un point du plan de cette ellipse. Les centres des quatre cercles circonscrits (cercles de Joachimsthal), passant par trois des pieds des normales, ont pour centre des moyennes distances le point d'émission des normales. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soit $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse.

Les normales, abaissées du point $(\alpha\beta)$ sur l'ellipse, ont leurs pieds sur l'hyperbole d'Apollonius

$$c^2xy - b^2\beta x + a^2\alpha y = 0$$

Éliminons x entre ces deux équations; on trouve

$$c^4 y^4 + 2c^2 b^2 \beta y^3 + \ldots - b^6 \beta^2 = 0.$$

L'hyperbole coupe l'ellipse en quatre points dont les ordonnées sont y', y'', y''', y^{IV}; on aura donc

$$\Sigma y' = -\frac{2b^2\beta}{c^2},$$

et, de même,

$$\Sigma x' = \frac{2a^2\alpha}{c^2}.$$

Le cercle de Joachimsthal, passant par les points 2, 3 et 4, aura pour équation développée dans chaque ouvrage de Géométrie analytique

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{c^2 x'}{a^2} - \alpha\right) - y\left(\frac{c^2 y'}{b^2} - \beta\right)$$
$$- \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - \alpha x' - \beta y' = 0,$$

d'où, pour les coordonnées de son centre,

$$X_1 = \frac{\alpha a^2 - c^2 x'}{2a^2}, \qquad Y_1 = \frac{c^2 y' + \beta b^2}{2b^2},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma X_1 = \frac{4\alpha a^2 - c^2 \Sigma x'}{2a^2} = \alpha, \qquad \Sigma Y_1 = \frac{c^2 y' + 4\beta b^2}{2b^2} = \beta.$$

On a donc, pour les coordonnées du centre des moyennes distances

$$x = \frac{\Sigma X_1}{4} = \frac{\alpha}{4},$$

de même

$$y = \frac{\beta}{4}.$$

Il y a donc une petite erreur dans l'énoncé. Le point cherché se trouve sur la droite qui joint le centre de l'ellipse au point d'émission des normales au quart à partir du centre.

Question 1703.

(1895, p. 58*)

1° *Le lieu des centres des coniques osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence et passant par un autre point donné de la circonférence est une hyperbole équilatère.*

2° *Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence est un cercle.*

3° *Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence est un cercle.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Prenons pour axe des x la tangente au point donné de la circonférence de rayon R, et pour axe des y le diamètre passant par ce point.

Toute conique osculatrice à la circonférence à l'origine aura une équation de la forme

$$(1)\qquad x^2 + y^2 - 2Ry + \lambda y(y - mx) = 0.$$

1° On obtiendra le lieu cherché en éliminant la variable λ entre les dérivées partielles par rapport à x et à y, de l'équation générale des coniques. On trouve aisément

$$my^2 - mx^2 + 2xy - mRy = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère dont le centre se trouve sur la corde d'osculation au quart à partir de l'origine et qui est tangente à la circonférence donnée à l'origine.

3° On obtiendra toutes les hyperboles équilatères du système en faisant dans l'équation (1)

$$\lambda = -2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 - 2mxy - 2Ry = 0.$$

En éliminant m entre les dérivées partielles de cette équation, par rapport à x et à y, on aura, pour le lieu des centres

cherché,

$$y^2 + x^2 - Ry = 0,$$

équation d'un cercle.

La conique sera une parabole si $4(1 + \lambda) = \lambda^2 m^2$.

2° De là, en posant $\lambda m = 2\varphi$, on a, pour l'équation des paraboles,

$$(x - \varphi y)^2 - 2Ry = 0.$$

Identifions cette équation avec l'équation aux foyers

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny - p)^2.$$

En éliminant, entre les équations d'identification, les quantités m, n, p, φ, on trouve aisément pour le lieu des foyers

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{3R}{2} = 0.$$

Ces trois questions se laissent traiter aussi par des considérations géométriques très élémentaires.

Question 1717.

(1896, p. 104).

NOTE

Par M. G. Gallucci.

A propos de la question 1717.

Pour éclaircir une phrase obscure de l'énoncé de la question 1717 on peut modifier cet énoncé en disant :

Le lieu des milieux des cordes d'un cercle O *ayant une projection donnée* $2l$ *sur un diamètre fixe* D *est une quartique* (m); *discuter cette courbe. Le cercle* O *et deux points* P, Q *de la courbe* (m) *étant donnés, déterminer la position du diamètre* D, *la projection* $2l$ *et les autres points de la courbe* (m).

On arrive à la solution de la seconde partie de la question par des considérations élémentaires fort simples; la construction est la suivante :

On conduit les cordes KL, MN du cercle O qui ont leurs milieux en P, Q; le diamètre du cercle O, perpendiculaire à la droite qui joint les milieux de KM et LN, donne une solu-

tion; le diamètre perpendiculaire à la droite qui joint les milieux de KN et LM donne une autre solution. Et ce sont là les seules solutions.

A propos de la première partie de la question, on peut arriver très simplement à la construction de la tangente, indépendamment des théorèmes de MM. d'Ocagne et Godefroy, en partant de l'équation polaire de la courbe (m) qui est $\rho^2 + \frac{l^2}{\sin^2\omega} = r^2$ (numéro d'avril, p. 188).

En dérivant par rapport à ω, on a

$$\rho'\rho = \frac{l^2 \cos\omega}{\sin^3\omega} \qquad \text{ou bien} \qquad \rho'\rho \tang\omega = \frac{l^2}{\sin^2\omega},$$

ρ' étant la sous-normale au point m. Si d est le point où D coupe $\overline{ab}$, on a

$$\overline{md} = \rho \tang\omega \qquad \text{et} \qquad \overline{mb} = \frac{l^2}{\sin^2\omega},$$

d'où

$$\rho' \overline{md} = \overline{mb}^2.$$

Donc, si l'on porte sur md le segment $\overline{mc} = \rho'$, le point c est le conjugué harmonique de d par rapport à a, b. De là on déduit la construction de la normale et, par conséquent, de la tangente.

Cette construction coïncide avec celle qui a été trouvée par M. Mannheim.

Si l'on part de l'équation cartésienne de la courbe, on obtient une construction un peu moins simple, et c'est celle que j'avais envoyée à la Rédaction et qu'il ne vaut pas la peine de reproduire ici.

QUESTIONS.

1808. Soit M un point quelconque de l'une des asymptotes d'une hyperbole donnée, de foyers F et F'. On considère la parabole tangente à MF en F et à MF' en F'. Montrer que le

foyer de cette parabole est situé sur l'hyperbole et que le lieu du sommet de la parabole se compose de deux hyperboles.

(E.-N. Barisien.)

1809. Les solutions communes aux deux équations

$$F(p, q, z) = 0,$$
$$F_1(r, s, t, p, q, z) = 0,$$

la seconde n'étant pas, bien entendu, une conséquence de la première, sont de la forme

$$z = \varphi(mx + ny),$$

m et n étant deux constantes. (A. Pellet.)

1810. Démontrer que la fonction

$$\varphi(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-n^2\pi x}$$

croît constamment quand x varie de 1 à $+\infty$. Cette fonction satisfait à l'équation $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$. (J. Franel.)

1811. Soient a et b deux nombres entiers positifs premiers entre eux, n un nombre entier positif quelconque. Démontrer que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = n$$

est égal à

$$E\left(n\frac{a'}{a}\right) + E\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1;$$

a' est l'associé du nombre b suivant le module a, c'est-à-dire le nombre positif $< a$ satisfaisant à la congruence

$$(a) \qquad ba' \equiv 1;$$

semblablement, b' est l'associé de a suivant le module b; enfin $E(x)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x. (J. Franel.)

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899.

Sujet.

Soient deux formes binaires

$$f = a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

$$\varphi = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} y + \alpha_2 x^{p-2} y^2 + \ldots,$$

dont la première seule, pour plus de commodité, est écrite avec les coefficients du binome, et dont la seconde a un degré p *égal ou inférieur à* m. *Le* $p^{\text{ième}}$ *composé, c'est-à-dire la fonction obtenue en appliquant à* f *l'opération symbolique*

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \alpha_0 \frac{\partial^p}{\partial y^p} - \alpha_1 \frac{\partial^p}{\partial y^{p-1}\,\partial x} + \ldots,$$

est un invariant simultané qui se réduit à la $p^{\text{ième}}$ *polaire du système* (x_1, y_1) *par rapport à* f *lorsque* φ *est égal à la puissance* $p^{\text{ième}}$ *de* $xy_1 - yx_1$.

Dans le cas général, lorsque cet invariant est nul identiquement, nous dirons, avec Rosanes, Reye, Sturm, Meyer, etc., que la forme φ *est apolaire par rapport à* f. *On propose de démontrer les propriétés suivantes des formes apolaires par rapport à une ou plusieurs formes binaires :*

1° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme donnée* f, *d'ordre* m, *se ramène à la somme de* p *puissances* $m^{\text{ièmes}}$ $(p \leq m)$, *sous la*

forme

$$(1)\quad \begin{cases} f = \mathrm{A}_1(xy_1 - yx_1)^m + \mathrm{A}_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots \\ \qquad + \mathrm{A}_p(xy_p - yx_p)^m, \end{cases}$$

est qu'il existe une forme φ *apolaire par rapport à* f *et égale au produit*

$$(2)\qquad \varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_p - yx_p);$$

lorsque l'on connaît une forme φ *apolaire par rapport à* f *et possédant des racines multiples, sous quelle forme canonique analogue à* (1) *peut-on mettre* f?

2° *Quel est l'ordre minimum des formes* φ *apolaires par rapport à une forme donnée* f, *d'ordre* m, *dont les coefficients ne sont soumis à aucune restriction; qu'en conclut-on relativement à la réduction de* f *à la forme* (1); *quelles relations doivent exister entre les coefficients de cette forme pour que l'ordre minimum de* φ *soit abaissé? Exemples relatifs aux formes des deuxième, troisième et quatrième degrés;*

Dans le cas de $p = m$, *si* φ *est apolaire par rapport à* f, f *est réciproquement apolaire par rapport à* φ; *quelles sont les formes apolaires par rapport à elles-mêmes?*

Étant donné un système de q *formes* f, *d'ordre* m, *linéairement indépendantes, montrer qu'il existe un système de* $m - q + 1$ *formes* φ *du même ordre, apolaires par rapport aux premières, que ces systèmes sont conjugués et que les déterminants fonctionnels formés l'un avec les dérivées d'ordre* $q - 1$ *des formes* f, *l'autre avec les déri-*

vées d'ordre $m-q$ des formes φ, ne diffèrent que par un facteur constant. Quelles conclusions peut-on tirer de là relativement à une réduction simultanée des formes considérées à une forme canonique, d'abord dans le cas de $q=m$, ensuite dans le cas de $q<m$?

Généraliser les résultats précédents au cas où l'on considère les formes φ, d'ordre $p<m$, apolaires au système des q formes f.

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de M. Gauthier-Villars;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 MAI 1899, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 mai et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mé-

moires ; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er juillet 1899, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite ;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

ERRATA.

Tome XVII, 1898. — Page 49, ligne 7 en remontant, *supprimez* Autre solution par M. DUCEY.

Page 421, ligne 4 en remontant, *au lieu de* la fonction ψ_1, *lisez* la fonction Ψ.

Page 422, ligne 4, *au lieu de* 1898, *lisez* 1897.

Page 425, ligne 16, dans le dénominateur de z, *au lieu de* d, *lisez* d_2.

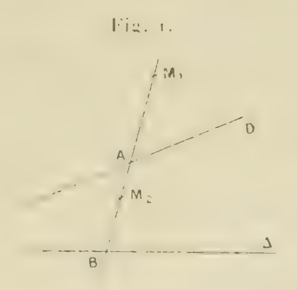
[P1c]

SUR UN CAS PARTICULIER DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE;

Par M. X. ANTOMARI.

Définition de la transformation. — Considérons deux droites fixes, D et Δ. Un point M_1 étant donné dans l'espace, on peut mener une droite et une seule passant par ce point et s'appuyant sur les droites D et Δ.

Fig. 1.



Imaginons qu'on ait mené cette droite et qu'au point M_1, on fasse correspondre le point M_2, conjugué harmonique du point M_1 par rapport aux points de rencontre A et B avec D et Δ. On a ainsi une correspondance point par point. Cette correspondance est une correspondance homographique. En effet :

1° A tout point de l'une des figures il correspond un point et un seul de l'autre. On peut même dire qu'on a une correspondance involutive; car à tout point M_1 considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux figures, il correspond toujours le même point M_2, puisqu'il existe une seule droite passant par M_1 et rencon-

trant D et Δ, et que, sur cette droite, il n'existe qu'un point M_2 conjugué harmonique de M_1 par rapport aux deux points A et B;

2° Si le point M_1 décrit une droite D_1, M_1M_2 engendre un hyperboloïde à une nappe dégénéré ou non dégénéré et, sur cet hyperboloïde, le point M_2 décrit une droite D_2 de même système que D, Δ et D_1; donc à une droite il correspond une droite;

3° A deux droites qui se coupent, il correspond évidemment deux droites qui se coupent; il en résulte qu'à un plan il correspond un plan. Par conséquent la correspondance est bien une correspondance homographique.

Propriétés. — Les droites D et Δ, directrices de la transformation, se correspondent évidemment à elles-mêmes; car si M_1 coïncide avec A, par exemple, M_2 coïncide aussi avec A.

Toute droite qui s'appuie sur D et sur Δ coïncide avec sa transformée; il en est, par suite, de même de toute surface réglée qui admet D et Δ comme directrices. En particulier, tout plan passant par D ou Δ coïncide avec le plan correspondant.

Considérons alors une ligne plane située dans un plan passant par D, par exemple, et rencontrant D en un point O. La ligne correspondante sera située dans le même plan et sera homologique à la première, D étant l'axe d'homologique et O le centre d'homologie.

Supposons que le point M_1 décrive une surface S_1 d'ordre m, le point M_2 décrit une surface de même ordre S_2, qui rencontre D et Δ aux mêmes points que S_1. De plus, les sections faites dans ces deux surfaces, par un même plan passant par D ou Δ, seront des sections homologiques.

Lorsque le point M_1 s'éloigne à l'infini, dans une direction quelconque, le point M_2 devient le milieu de AB parallèle à cette direction et s'appuyant sur D et Δ. Il en résulte que, au plan de l'infini, il correspond le plan équidistant des deux droites. Par conséquent si une courbe quelconque a p points à l'infini, la transformée rencontrera en p points le plan équidistant des deux droites, et réciproquement.

Nous avons vu que, à toute figure plane située dans un plan passant par D ou Δ, il correspond une figure située dans le même plan et homologique à la première. Si le plan de la courbe est mené par D, par exemple, parallèlement à Δ, la droite D est un diamètre des deux figures par rapport à la direction Δ; de sorte que si D et Δ sont rectangulaires, les deux figures sont symétriques par rapport à D. On a une propriété analogue concernant les figures situées dans le plan mené par Δ parallèlement à D.

Soit ω le milieu de la perpendiculaire commune à D et à Δ. Comme au point ω il correspond le point à l'infini sur la perpendiculaire commune, à toute droite menée par ω il correspondra une droite perpendiculaire au plan P équidistant des deux droites D et Δ.

Formules de transformation. — Prenons pour origine le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites; prenons, en outre, cette perpendiculaire commune pour axe des z, et les bissectrices des projections des deux droites sur le plan équidistant pour axes des x et des y. Les équations des deux droites D et Δ sont respectivement

$$y - mx = 0 \quad \text{et} \quad y + mx = 0,$$
$$z - h = 0 \quad \text{et} \quad z + h = 0.$$

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M_1, x_2, y_2, z_2 celles du point M_2, et λ le rapport $\frac{M_1A}{AM_2}$, les coordonnées du point A sont

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Comme le point A est situé sur D, on a

$$(1) \qquad y_1 + \lambda y_2 - m(x_1 + \lambda x_2) = 0,$$

$$(2) \qquad z_1 + \lambda z_2 - h(1 + \lambda) = 0.$$

D'autre part, si les quatre points M_1, M_2, A, B forment une division harmonique, les coordonnées du point M_2 sont

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda};$$

de sorte que si l'on exprime que ce point est sur Δ, il vient

$$(3) \qquad y_1 - \lambda y_2 - m(x_1 - \lambda x_2) = 0,$$

$$(4) \qquad z_1 - \lambda z_2 + h(1 - \lambda) = 0.$$

En éliminant λ entre les équations (1), (2), (3), (4), on obtient facilement

$$(5) \qquad x_1 = \frac{h y_2}{m z_2}, \qquad y_1 = \frac{h m x_2}{z_2}, \qquad z_1 = \frac{h^2}{z_2}.$$

Ces formules, qui sont réciproques en x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, définissent la transformation, qui est évidemment une transformation homographique. Elles mettent bien en évidence les propriétés de la transformation, que nous avons étudiées directement.

Nous allons les utiliser pour obtenir d'autres résultats.

Considérons d'abord deux positions du point M_2 symétriques par rapport à l'origine. Si dans les formules (5)

on change x_2, y_2, z_2 respectivement en $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$, les valeurs de x_1 et de y_1 ne changent pas, et la valeur de z_1 change de signe; donc les deux positions de M_1 qui correspondent aux positions considérées de M_2 sont symétriques par rapport au plan des xy.

Il en résulte que si l'un des points décrit une figure admettant l'origine comme centre de symétrie, la figure correspondante admettra le plan des xy comme plan de symétrie, et réciproquement.

Autrement, si l'on considère deux figures symétriques par rapport à l'origine, les deux figures correspondantes seront symétriques par rapport au plan des xy, et réciproquement.

En particulier, à une droite ou à un plan passant par l'origine, il correspond une droite ou un plan perpendiculaires au plan des xy.

Considérons, d'après cela, un hyperboloïde à deux nappes, dont l'équation par rapport aux axes choisis est

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

L'équation de la surface transformée est

$$\frac{h^2 y^2}{m^2 a^2 z^2} + \frac{h^2 m^2 x^2}{b^2 z^2} - \frac{h^4}{c^2 z^4} + 1 = 0,$$

et l'on peut l'écrire

$$\frac{h^2 m^2 x^2}{b^2} + \frac{h^2 y^2}{a^2 m^2} + z^2 - \frac{h^4}{c^2} = 0.$$

Voyons si cette équation peut représenter une sphère. Pour qu'il en soit ainsi il faut évidemment et il suffit que l'on ait

$$\frac{h^2 m^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2 m^2} = 1.$$

De ces deux équations, on tire d'abord

$$m^2 = \pm \frac{b}{a}$$

et ensuite

$$h^2 = \mp ab.$$

Si l'on veut que m et h soient réels, il faut prendre

$$m^2 = \frac{b}{a},$$

$$h^2 = ab.$$

Donc, étant donné un hyperboloïde à deux nappes, il existe toujours deux droites réelles et deux seulement perpendiculaires à l'axe transverse, et telles que si on les prend comme directrices de la transformation définie plus haut, l'hyperboloïde se transforme en une sphère concentrique.

Le carré du rayon de la sphère est, d'ailleurs,

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}, \qquad \text{d'où} \qquad R = \frac{ab}{c},$$

c'est-à-dire la quatrième proportionnelle entre a, b, c.

Généralisation de la transformation. — Une généralisation évidente de la transformation consiste à faire correspondre les points M_1 et M_2, de telle sorte que le rapport anharmonique

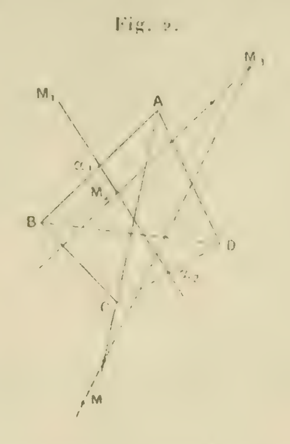
$$\frac{M_1 A}{AM_2} : \frac{M_1 B}{BM_2}$$

ait une valeur donnée K.

Transformation générale. — Il est aisé de voir que la transformation homographique la plus générale se ramène à trois transformations de cette espèce. Suppo-

posons, en effet, que l'on prenne le tétraèdre des points doubles comme tétraèdre de référence, et soient $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ les équations des faces. Si A, B,

Fig. 2.



C, D sont les sommets du tétraèdre, on peut supposer que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ sont les équations des faces opposées respectivement aux sommets A, B, C, D. La transformation homographique la plus générale est alors définie par les formules

$$\rho X = \alpha X_1, \qquad \rho Y = \beta Y_1, \qquad \rho Z = \gamma Z_1, \qquad \rho T = \gamma T_1.$$

Soit un point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1. Menons la droite $M_1 \alpha_1 \alpha_2$ qui rencontre les deux arètes opposées AB et CD du tétraèdre, et prenons le point

$$M_2(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

tel que le rapport anharmonique $(M_1 \alpha_1 M_2 \alpha_2)$ ait une valeur donnée. Entre les coordonnées des points M_1, M_2 on a alors les relations

$$(1) \qquad \frac{x_1}{x_2} = k\frac{t_1}{t_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} = k\frac{t_1}{t_2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Menons maintenant par le point M_2 la droite qui s'appuie sur les arêtes opposées AB, DC, et prenons le point $M_3(x_3, y_3, z_3, t_3)$, tel que le rapport anharmonique des quatre nouveaux points ait une autre valeur donnée; on a alors

$$(2) \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{t_2}{t_3}, \qquad \frac{y_2}{y_3} = k_1 \frac{t_2}{t_3}, \qquad \frac{z_2}{z_3} = k_1 \frac{t_2}{t_3}.$$

Recommençons enfin les mêmes constructions avec le point M_3 et les arêtes opposées AC, BD, de manière à obtenir le point $M(x, y, z, t)$; on aura ainsi

$$(3) \qquad \frac{x_3}{x} = k_2 \frac{t_3}{t}, \qquad \frac{y_3}{y} = \frac{t_3}{t}, \qquad \frac{z_3}{z} = k_2 \frac{t_3}{t}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les équations correspondantes (1), (2), (3), on obtient finalement

$$(4) \qquad \frac{x_1}{x} = kk_2 \frac{t_1}{t}, \qquad \frac{y_1}{y} = kk_1 \frac{t_1}{t}, \qquad \frac{z_1}{z} = k_1 k_2 \frac{t_1}{t}.$$

La comparaison, avec les formules

$$\rho X = \alpha X_1, \qquad \rho Y = \beta Y_1, \qquad \rho Z = \gamma Z_1, \qquad \rho T = \gamma T_1.$$

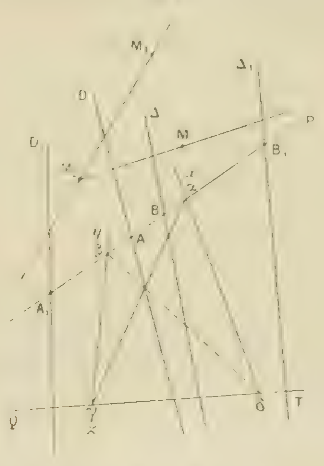
montre immédiatement que les équations (4) définissent entre M_1 et M la transformation homographique la plus générale.

On peut se demander maintenant s'il ne serait pas possible d'obtenir la transformation homographique la plus générale en répétant deux fois la transformation définie au début. *A priori*, le problème paraît possible d'une infinité de manières, car la transformation homographique la plus générale dépend de quinze paramètres; or, les deux transformations successives dont elle devrait résulter sont définies quand on donne les deux couples de directrices, qui dépendent de seize paramètres. Mais nous allons voir qu'on ne peut obtenir, de cette ma-

nière, la transformation homographique la plus générale.

Soient, en effet, D, D_1 les directrices de la première transformation, Δ, Δ_1 les directrices de la transformation suivante. On sait qu'il existe, en général, deux droites P, Q rencontrant les quatre droites D, D_1, Δ, Δ_1. Appelons A et A_1 les points de rencontre de P avec D

Fig. 3.



et D_1; appelons de même B et B_1 les points de rencontre de P avec Δ et Δ_1. Si l'on considère les points α et β, points doubles de l'involution définie par les deux couples de points correspondants (A, A_1) et (B, B_1), le point β correspond au point α dans la transformation dont les directrices sont D et D_1; par suite, dans la transformation dont les directrices sont Δ et Δ_1, le point α correspond au point β; donc, finalement, le point α se correspond à lui-même. Il en résulte que si les couples de droites D, D_1, Δ, Δ_1 existent, ces droites s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre des points doubles de la transformation homographique la plus générale.

Soit donc $\alpha\beta\gamma\delta$ le tétraèdre des points doubles que nous prendrons pour tétraèdre de référence et soient

$$Y - aX = 0 \quad \text{et} \quad Y + aX = 0,$$
$$Z - bT = 0 \quad \text{et} \quad Z + bT = 0$$

les équations des droites D et D_1 qui divisent harmoniquement les arêtes opposées $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ du tétraèdre. Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont les coordonnées des points M_1 et M_2, on doit avoir

$$y_1 + \lambda y_2 - a(x_1 + \lambda x_2) = 0,$$
$$z_1 + \lambda z_2 - b(t_1 + \lambda t_2) = 0,$$
$$y_1 - \lambda y_2 + a(x_1 - \lambda x_2) = 0,$$
$$z_1 - \lambda z_2 + b(t_1 - \lambda t_2) = 0.$$

On en déduit, en éliminant λ,

$$(1) \qquad \frac{x_1}{t_1} = \frac{b}{a}\,\frac{y_2}{z_2}, \qquad \frac{y_1}{t_1} = ab\,\frac{x_2}{z_2}, \qquad \frac{z_1}{t_1} = b^2\,\frac{t_2}{z_2}.$$

Il en résulte que si les équations des droites Δ et Δ_1 sont respectivement

$$Y - a'X = 0 \quad \text{et} \quad Y + a'X = 0,$$
$$Z - b'T = 0 \quad \text{et} \quad Z + b'T = 0,$$

les coordonnées (x, y, z, t) du point M, obtenu au moyen de M_2 et de Δ, Δ_1, comme M_2 a été obtenu au moyen de M, D et D_1, sont liées à x_2, y_2, z_2, t_2 par les relations

$$(2) \qquad \frac{x_2}{t_2} = \frac{b'}{a'}\,\frac{y}{z}, \qquad \frac{y_2}{t_2} = a'b'\,\frac{x}{z}, \qquad \frac{z_2}{t_2} = b'^2\,\frac{t}{z}.$$

En comparant avec les formules (1) on en déduit

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{ba'}{b'a}\,\frac{x}{t}, \qquad \frac{y_1}{t_1} = \frac{ab}{a'b'}\,\frac{y}{t}, \qquad \frac{z_1}{t_1} = \frac{b^2}{b'^2}\,\frac{z}{t},$$

formules qui ne dépendent que des rapports $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$.

Elles ne définissent donc pas la transformation homographique la plus générale.

[M²4b]

RÉDUCTION A LA FORME CANONIQUE DES FORMULES QUI DONNENT, EN FONCTION RATIONNELLE DE DEUX PARAMÈTRES, LES COORDONNÉES D'UN POINT DE LA SURFACE DE STEINER;

Par M. E. LACOUR,

Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

---

1. Considérons la surface (S) définie par les formules

$$X = \varphi_1(x, y, z), \qquad Y = \varphi_2(x, y, z), \qquad Z = \varphi_3(x, y, z),$$
$$T = \varphi_4(x, y, z),$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 désignent des polynomes entiers et homogènes du second degré en x, y, z, entre lesquels il n'existe pas de relation linéaire identique, et regardons x, y, z comme les coordonnées trilinéaires d'un point m pris dans un plan auxiliaire (Π).

La surface (S) est représentée sur le plan (Π), et les sections planes de cette surface ont pour images les coniques du système linéaire

$$(C) \quad \begin{cases} U\varphi_1(x, y, z) - V\varphi_2(x, y, z) \\ \qquad - W\varphi_3(x, y, z) - H\varphi_4(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

En écartant les cas où, dans la situation relative des coniques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0,$$

se présenteraient des particularités qui seront précisées dans la suite, nous allons démontrer qu'on peut choisir

le triangle de référence dans le plan (Π), et le tétraèdre auquel est rapportée la surface (S), de façon que les formules définissant cette surface puissent se ramener à la forme

$$X = 2yz, \quad Y = 2zx, \quad Z = 2xy, \quad T = x^2 + y^2 + z^2.$$

2. *Les coniques* (C) *du système linéaire sont les coniques harmoniquement circonscrites aux coniques d'un faisceau tangentiel*

$$(\Gamma) \qquad \psi_1(u, v, w) + \lambda\psi_2(u, v, w) = 0,$$

qu'il est facile de déterminer en exprimant qu'une conique donnée par son équation tangentielle est harmoniquement inscrite à chacune des coniques

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = 0.$$

Les coniques (Γ) du faisceau tangentiel sont les coniques inscrites dans un quadrilatère *abcd*; trois d'entre elles se décomposent en deux points, savoir : *a* et *c*, *b* et *d*, *e* et *f*, et l'on peut avoir les droites joignant les deux points d'un même couple en résolvant une équation du troisième degré.

3. *Il existe dans le système linéaire des coniques* (C), *images des sections planes de* (S), *quatre coniques réduites chacune à une droite double.*

En effet, une conique (C) est harmoniquement circonscrite à la conique formée des deux points *b* et *d* et, par suite, (C) divise harmoniquement les deux segments *ac* et *bd*; si la conique (C) se réduit à une droite double, cette droite double ne peut être que l'un des côtés du quadrilatère *abcd* compté deux fois, et réciproquement un des côtés du quadrilatère compté deux fois forme une conique harmoniquement circonscrite à l'ensemble des

deux points a et c d'une part, et à l'ensemble des deux points b et d d'autre part.

Ceci nous conduit à prendre comme triangle de référence dans le plan (II) le triangle formé par les diagonales du quadrilatère $abcd$, de sorte que les côtés du quadrilatère ont pour équations

$$x - y - z = 0, \qquad -x - y - z = 0,$$
$$-x - y + z = 0, \qquad x + y + z = 0.$$

D'après ce que nous avons vu sur les droites doubles du système linéaire

$$\mathrm{U}\varphi_1(x, y, z) + \mathrm{V}\varphi_2(x, y, z) \\ + \mathrm{W}\varphi_3(x, y, z) + \mathrm{H}\varphi_4(x, y, z) = 0,$$

on pourra déterminer des constantes telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}'\varphi_1 + \mathrm{V}'\varphi_2 + \mathrm{W}'\varphi_3 + \mathrm{H}'\varphi_4 &= (x - y - z)^2,\\
\mathrm{U}''\varphi_1 + \mathrm{V}''\varphi_2 + \mathrm{W}''\varphi_3 + \mathrm{H}''\varphi_4 &= (-x + y - z)^2,\\
\mathrm{U}'''\varphi_1 + \mathrm{V}'''\varphi_2 + \mathrm{W}'''\varphi_3 + \mathrm{H}'''\varphi_4 &= (-x - y + z)^2,\\
\mathrm{U}^{(\mathrm{IV})}\varphi_1 + \mathrm{V}^{(\mathrm{IV})}\varphi_2 + \mathrm{W}^{(\mathrm{IV})}\varphi_3 + \mathrm{H}^{(\mathrm{IV})}\varphi_4 &= (x + y + z)^2,
\end{aligned}$$

et si l'on fait le changement de coordonnées défini par les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_1 &= \mathrm{U}^{(1)}\mathrm{X} + \mathrm{V}^{(1)}\mathrm{Y} + \mathrm{W}^{(1)}\mathrm{Z} + \mathrm{H}^{(1)}\mathrm{T},\\
\mathrm{Y}_1 &= \mathrm{U}^{(2)}\mathrm{X} + \mathrm{V}^{(2)}\mathrm{Y} + \mathrm{W}^{(2)}\mathrm{Z} + \mathrm{H}^{(2)}\mathrm{T},\\
\mathrm{Z}_1 &= \mathrm{U}^{(3)}\mathrm{X} + \mathrm{V}^{(3)}\mathrm{Y} + \mathrm{W}^{(3)}\mathrm{Z} + \mathrm{H}^{(3)}\mathrm{T},\\
\mathrm{T}_1 &= \mathrm{U}^{(4)}\mathrm{X} + \mathrm{V}^{(4)}\mathrm{Y} + \mathrm{W}^{(4)}\mathrm{Z} + \mathrm{H}^{(4)}\mathrm{T},
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{X}_1} &= x - y - z,\\
\sqrt{\mathrm{Y}_1} &= -x + y - z,\\
\sqrt{\mathrm{Z}_1} &= -x - y + z,\\
\sqrt{\mathrm{T}_1} &= x + y + z.
\end{aligned}$$

4. On déduit de là, pour l'équation de la surface (S)

dans le nouveau système de coordonnées,

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{Y_1} + \sqrt{Z_1} + \sqrt{T_1} = 0.$$

C'est une des formes simples de l'équation de la surface de Steiner.

Pour obtenir les expressions des coordonnées d'un point de la surface annoncées au commencement, il suffit de faire le changement de coordonnées défini par les formules

$$\begin{aligned} 4X' &= X_1 - Y_1 - Z_1 + T_1, \\ 4Y' &= -X_1 + Y_1 - Z_1 + T_1, \\ 4Z' &= -X_1 - Y_1 + Z_1 + T_1, \\ 4T' &= X_1 + Y_1 + Z_1 + T_1. \end{aligned}$$

En remplaçant X_1, Y_1, Z_1, T_1 par leurs valeurs en fonction de x, y, z, on trouve

$$\begin{aligned} 4X' &= (x-y-z)^2 - (x+y-z)^2 \\ &\quad - (-x-y+z)^2 + (x+y+z)^2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 4T' &= (x-y-z)^2 + (-x+y-z)^2 \\ &\quad + (-x-y+z)^2 + (x+y+z)^2, \end{aligned}$$

ou enfin

$$X' = 2yz, \qquad Y' = 2zx, \qquad Z' = 2xy, \qquad T' = x^2 + y^2 + z^2.$$

Remarque. — La démonstration précédente a été faite en supposant que les tangentes communes aux coniques du faisceau tangentiel

$$\psi_1(u, v, w) + \lambda\psi_2(u, v, w) = 0$$

forment un quadrilatère proprement dit, c'est-à-dire que l'équation en λ qui détermine les coniques décomposées en deux points a ses racines distinctes.

Les formules finales doivent être modifiées, par exemple si deux côtés opposés de ce quadrilatère sont confondus.

Le degré de la surface (S) s'abaisse quand les coniques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0$$

ont un ou deux points communs. Dans ce cas, l'une au moins des coniques (Γ) se compose d'un point compté deux fois. L'équation en λ du faisceau tangentiel n'a pas ses racines distinctes.

Pour une discussion des cas singuliers que nous avons écartés, on pourra se reporter à un Mémoire de Clebsch sur la surface de Steiner (*Journal de Crelle*, t. 67, p. 1-22), où se trouve indiquée la réduction exposée ici, et auquel nous avons voulu surtout renvoyer le lecteur.

[M²3f] [B9a]

SUR L'UNE DES FORMES CANONIQUES DE L'ÉQUATION DES SURFACES CUBIQUES;

Par M. DUMONT.

Lorsqu'on dit d'une forme réduite d'une équation algébrique représentant une courbe (ou une surface) qu'elle est *générale*, on peut l'entendre dans deux sens. Ou bien elle est *absolument générale*, c'est-à-dire est susceptible de représenter tous les cas, sans exception; ou bien elle est *relativement générale*, c'est-à-dire peut représenter les cas généraux où la courbe (ou la surface) ne présente pas de singularités ou du moins certaines singularités. Il ne suffit pas, comme on l'a souvent remarqué, qu'une forme possède le nombre de paramètres convenable pour qu'elle puisse être même *relativement générale*. Ainsi l'équation du second de-

gré $(ax+b)^2+c^2=0$ n'est pas même relativement générale, bien que contenant deux paramètres. Deux exemples d'équations non générales, quoique renfermant le nombre voulu de paramètres, sont donnés dans Salmon, *Algèbre supérieure,* trad. Chemin, page 216.

Aussi, bien que l'équation

$$ax^3+by^3+cz^3+du^3+ev^3=0,$$

donnée par Sylvester pour les surfaces du troisième ordre, contienne dix-neuf paramètres, comme l'équation générale du troisième ordre à trois variables, a-t-on considéré comme nécessaire de démontrer sa généralité. Cette généralité a été prouvée par divers auteurs ; elle résulte aussi d'un raisonnement par lequel j'ai prouvé qu'une surface cubique générale est déterminée sans ambiguïté par sa hessienne (*Nouvelles Annales* ; 1896).

La généralité de cette forme n'est, du reste, que *relative* et certaines surfaces ne peuvent être représentées par l'équation considérée. Au lieu de la considérer comme une forme à dix-neuf paramètres, on peut supposer que les plans x, y, z, u sont les faces d'un tétraèdre de référence ; l'équation ne contient plus alors que sept paramètres : les rapports des nombres a, b, c, d, e à l'un d'entre eux et les trois nombres déterminant le plan $v=0$.

D'une manière générale, l'équation des surfaces cubiques est réductible à une forme à sept paramètres, car les formules générales

$$\rho y_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + x_4 \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

pour le changement de tétraèdre de référence contiennent $3\times 4=12$ paramètres dont on peut disposer pour faire disparaître douze coefficients dans l'équation générale

$$\Sigma A_{ijk} x_i x_j x_k = 0.$$

Parmi les formes à sept paramètres, considérons la suivante,

$$(1)\quad \begin{cases} ax^2y + by^2z + cz^2t + dt^2x \\ \quad + 2fxyz + 2gyzt + 2hztx + 2ktxy = 0. \end{cases}$$

Elle représente, comme on le voit de suite, une surface à la fois inscrite et circonscrite au tétraèdre de référence. Est-elle générale?

Considérons d'abord les cubiques planes pour lesquelles la forme analogue est

$$ax^2y + by^2z + cz^2x + 2mxyz = 0.$$

Analytiquement, on voit que les formules de transformations relatives au changement de triangle de référence contenant six paramètres, la réduction à cette forme à trois paramètres semble possible. Géométriquement, on voit que l'on ne pourra pas prendre pour l'un des sommets du triangle inscrit et circonscrit un point quelconque de la courbe, c'est-à-dire que le problème, s'il a des solutions, n'en a qu'un nombre limité. En fait, on constate que l'équation n'est que *relativement* générale, car, si l'on suppose que la courbe a un point double, il faut que ce point double soit isolé.

Si l'on passe maintenant aux surfaces cubiques, on voit que, analytiquement, il y a analogie avec les courbes, puisque le nombre de paramètres dont on dispose est précisément celui qui est nécessaire pour réduire l'équation à n'avoir que sept paramètres. Mais, géométriquement, l'analogie cesse, car ici le problème de la réduction devient indéterminé.

En effet, soient A_1 un point de la surface S, P le plan tangent en A_1, C le cône tangent à S et de sommet A_1, (γ) la courbe de contact de C avec la surface, (Γ) la cubique plane (S, P). Prenons un point A_2 sur (γ),

soient C_1 le cône tangent à S et de sommet A_2 et A_3 un point de la courbe (γ_1) de contact de C_1 et S; soient enfin C_2 le cône tangent à S et de sommet A_3 et (γ_2) sa courbe de contact. Si A_4 est l'un des points d'intersection de (γ_2) et (Γ), le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$, qui est inscrit, est tel que le plan tangent en A_2 passe en A_1, que le plan tangent en A_3 passe en A_2, le plan tangent en A_4 passe en A_3 et que le plan tangent en A_1 passe en A_4.

Ainsi, une multiple infinité de tétraèdres sont à la fois inscrits et circonscrits et l'on peut prendre le premier sommet quelconque.

Il resterait à voir dans quelles conditions le sommet A_4 est réel, c'est-à-dire dans quel cas le tétraèdre peut être pris pour tétraèdre de référence et, d'autre part, quelles sont les surfaces non comprises dans cette forme d'équation.

On voit, de suite : 1° que l'hypothèse

$$a = b = c = d = 0$$

donne des surfaces à quatre points doubles; 2° que

$$f = g = h = k = 0$$

donne des surfaces passant, comme (1), par les arêtes $x = z = 0$ et $y = t = 0$ du tétraèdre, mais telle de plus, que chaque face du tétraèdre coupe suivant une conique tangente à deux arêtes du tétraèdre, dont l'une est la droite de la surface qui est arête du tétraèdre. Ces surfaces n'ont, d'ailleurs, aucun point double, tant que $abcd \gtrless 0$, mais si l'on a de plus $d = 0$, le point

$$x = y = z = 0$$

est point double, le cône tangent étant réduit au plan $z^2 = 0$ et si l'on a $b = d = 0$, les surfaces représentées

sont réglées avec $x = z = 0$ pour directrice double et $y = t = 0$ pour directrice simple.

On remarque encore les cas particuliers suivants :

$$d = g = h = k = 0,$$

un point double $x = y = z = 0$, cône tangent $z^2 = 0$;

$$d = f = h = k = 0,$$

un point double $x = y = z = 0$, cône tangent composé des plans $z = 0$, $cz + 2by = 0$;

$$d = f = g = h = 0,$$

deux points doubles $x = y = z = 0$ et $x = z = 0$, $ax + 2k = 0$, le cône tangent au premier est

$$cz^2 + 2kxy = 0;$$
$$c = d = f = g = 0,$$

deux points doubles, $x = y = z = 0$, $x = y = t = 0$, le cône tangent au premier est $x[hz + ky] = 0$, le cône tangent au second est le cône proprement dit

$$by^2 + 2htx = 0.$$

On a donc un binode et un cnicnode.

Le premier de ces cônes se réduit aux plans $xz = 0$, si l'on a de plus $k = 0$;

$$b = d = g = h = k = 0,$$

surfaces réglées possédant une directrice simple

$$y = t = 0$$

(la directrice double est $x = z = 0$).

Il y aurait lieu, pour les cas particuliers comme pour le cas général, de rechercher quelles sont les conditions restrictives, s'il y en a.

[M²7a]

ÉVALUATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ORDRE DE LA SURFACE RÉGLÉE DÉFINIE PAR TROIS DIRECTRICES D'ORDRES m, n, p;

PAR M. E. BALLY.

On admet qu'une courbe d'ordre q et une surface d'ordre r ont qr points communs.

Soient trois courbes C_m, C_n, C_p, d'ordres m, n, p.

Si les trois directrices sont rectilignes, $m = n = p = 1$, et la surface est une quadrique d'ordre $2 = 2mnp$.

Supposons démontré que si l'une au moins C_m des directrices est rectiligne, la surface réglée correspondante $S_{1,n,p}$ est d'ordre $2np = 2mnp$.

Soit $S_{m,n,p}$ la surface relative à trois courbes quelconques. Je suppose que les points de cette surface par lesquels passent plusieurs droites rencontrant C_m, C_n, C_p sont des points singuliers ou forment des lignes singulières.

Les courbes C_m, C_n, C_p sont de telles lignes singulières. Par un point de C_m passent np droites rencontrant C_n et C_p, communes aux deux cônes d'ordres n et p qui projettent C_n et C_p. Les plans de ces droites combinées deux à deux enveloppent une ou plusieurs surfaces développables, et une droite arbitraire de l'un de ces plans est tangente à l'une de ces développables.

Pour avoir l'ordre de $S_{m,n,p}$, je vais chercher le nombre de ses points communs avec une droite C_1 satisfaisant aux deux conditions :

1° De n'être tangente à aucune de ces développables ;

2° De ne passer par aucun des points singuliers précédents.

Pour cela, je considère la surface auxiliaire $S_{1,n,p}$ définie par C_1, C_n, C_p et d'ordre $2np$, par hypothèse. Elle est coupée par C_m en $2mnp$ points par chacun desquels passe une droite, et, en vertu de la première condition, une seule rencontrant C_1, C_n, C_p. De plus, deux droites relatives à deux points différents ne peuvent se couper sur C_1, en vertu de la deuxième condition. On trouve donc, sur C_1, exactement $2mnp$ points, et la surface est d'ordre $2mnp$.

On peut observer comme vérification que si les trois courbes se réduisent à des systèmes de m, n, p droites, les génératrices de la surface forment mnp demi-quadriques. Je dois cette remarque à M. L. Gérard.

Si par tout point de la surface (ou de l'une de ses parties quand celle-ci se décompose) passent a droites rencontrant les trois courbes données, cette surface (ou la partie en question) doit être comptée a fois.

Par exemple, soient trois sections planes d'une quadrique. Les droites qui rencontrent ces trois courbes sont : 1° les génératrices de six cônes du second ordre, dont chacun a son sommet en un point commun à deux courbes et projette l'autre ; 2° les génératrices des deux systèmes de la quadrique. En comptant celle-ci deux fois, on trouve bien 16 pour l'ordre du lieu complet.

[H11]

L'INTÉGRATION PAR L'ITÉRATION ET LE CALCUL DES FONCTIONS ITÉRATIVES;

Par M. FERBER.

Plusieurs géomètres s'occupent de l'itération, c'est-à-dire de l'opération $f\{f[f\ldots f(x)]\} = f^n(x)$, où la

fonction f est répétée n fois. MM. Kœnigs, Bourlet et Lémeray ont notamment démontré plusieurs propriétés de cette opération.

La plus importante est que les racines de $f(x) - x$ sont données par $f^n(x_0)$ lorsque n croît indéfiniment ([1]).

La remarque suivante, non moins importante, montre que l'itération résout aussi l'intégration aux différences quelconques.

En effet, si nous faisons

$$f(x) = x + \tau \varphi x,$$

on aura successivement

$$x_1 = x_0 + \tau \varphi x_0, \qquad x_2 = x_1 + \tau \varphi x_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_{n-1} + \tau \varphi x_{n-1},$$

et l'on voit ainsi que x_n est d'un côté $f^n(x_0)$, et de l'autre la solution de l'équation $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi x$, où chaque accroissement de la variable t est supposé égal à τ.

Pour passer à l'intégration aux différences infiniment petites, il suffit de faire tendre τ vers o et n vers ∞ en conservant à $n\tau$ la valeur constante t ([2]).

En généralisant la définition de l'itération par la supposition que les fonctions successives ne sont pas né-

---

([1]) Avec un choix judicieux de x_0.

([2]) C'est le procédé constamment employé par les précurseurs des inventeurs du Calcul intégral et qui a soulevé au commencement du XVIIIe siècle des discussions passionnées, principalement théologiques. Elles ne se sont d'ailleurs calmées qu'après que Lagrange eut par la dérivée supprimé les infinis dans le courant du calcul. Comme conclusion, si l'on n'avait pas cédé à ces controverses, l'Analyse s'occuperait aujourd'hui non pas du calcul des fonctions par l'étude des dérivées, mais du calcul des fonctions par l'étude de l'itération.

cessairement les mêmes et qu'elles peuvent avoir plusieurs variables, on intégrerait de même des fonctions plus compliquées telles que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x, t), \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \varphi(x, y),$$

$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \varphi(x), \qquad \cdots.$$

L'itération résolvant les deux problèmes fondamentaux de l'Algèbre supérieure, on comprend l'intérêt qu'il y aurait à avoir une formule générale donnant $f^n(x_0)$.

M. Bourlet, dans les *C. R.*, p. 583; 1898, a donné une formule simple qui montre bien la manière dont n entre dans le résultat, mais qui, tirée d'une identité, ne permet pas le calcul numérique.

Voici un artifice très puissant grâce auquel on peut trouver une formule lorsque f se laisse développer suivant les puissances croissantes de la variable.

Soit le quotient $\frac{f(a_p)}{1 - a'_p x}$, où à la constante a en correspond une autre de même indice accentuée. On convient de faire dans le quotient effectué $aa' = 1$ aussi souvent que possible, puis $a = 0$, $a' = 0$. Il est clair que le résultat sera $f(x)$; mais cette nouvelle façon d'écrire dégage x de f et permet d'opérer sur cette variable. C'est ainsi qu'on aura évidemment

$$f(fx) = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fx_0}, \qquad ffx = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fa_2}\,\frac{1}{1 - a'_2 fx_0},$$

et généralement

$$f^n x_0 = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fa_2}\,\frac{1}{1 - a'_2 fa_3}\cdots\frac{1}{1 - a'_{n-1} fx_0},$$

et, pour le cas de deux variables,

$$x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad y_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$x_n = \frac{f(a_1, b_1)}{(1 - a'_1 f a_2, b_2)(1 - b'_1 \varphi a_2, b_2)}$$
$$\times \frac{1}{(1 - a'_2 f a_3, b_3)(1 - b'_2 \varphi a_3, b_3)} \cdots$$
$$\times \frac{1}{(1 - a'_{n-1})(f x, y)(1 - b'_{n-1} \varphi x, y)}.$$

Pour mettre ces formules sous forme entière, on emploiera les fonctions aleph de Wronski et l'on arrivera ainsi à la formule parue dans le tome IV de l'*Intermédiaire*, p. 175.

Il ne faut pas s'effrayer de la multiplicité des termes qui vont s'introduire ainsi; d'ailleurs plusieurs de ces termes deviennent nuls par convention ou par la nature des fonctions. Enfin, s'il reste un grand nombre de termes, c'est que la question les comporte et toute autre méthode les introduirait qui n'aurait ni l'avantage de la généralité, ni celui de la symétrie.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

1° *Qu'appelle-t-on solution singulière d'une équation différentielle du premier ordre?*

2° *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0,$$

comment peut-on reconnaître, sur cette équation, si elle admet une solution singulière et déterminer cette solution?

3° *Comment peut-on déduire de l'intégrale générale la solution singulière?*

4° *Dans le cas où l'équation* (1) *n'admet pas de solution singulière, que représente l'équation obtenue en éliminant y' entre l'équation* (1) *et l'une ou l'autre des deux équations*

$$\frac{df}{dy'} = 0, \qquad \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} = 0.$$

1° *Faire voir que la courbe*

$$(1) \qquad (x^3 + y^3)^2 = x^2(4x^2 - y^2)$$

est unicursale. Exprimer les coordonnées de chacun de ses points en fonctions rationnelles d'un paramètre.

2° *On coupera la courbe par le faisceau de courbes du quatrième ordre qui ont pour équation*

$$(x^3 + y^3)(ty - 2x) = x(4x^2 - y^2)$$

et l'on expliquera pourquoi ce faisceau de courbes conduit à la solution.

3° *Calculer l'intégrale*

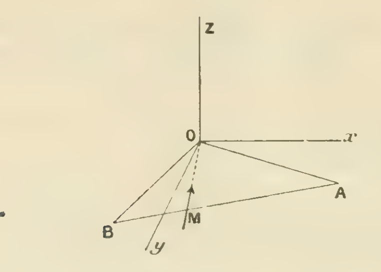
$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x},$$

x et y étant liées par l'équation (1).

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

COMPOSITION ÉCRITE. — *Un triangle isoscèle homogène* AOB, *rectangle en* O, *est mobile dans son plan*

xOy autour de son sommet O. En même temps un point matériel M, de masse m, est assujetti à se mou-



voir sur l'hypoténuse AB. On demande de déterminer le mouvement du système formé du triangle AOB et du point M en négligeant les frottements, et en supposant que le point M est attiré par le point O de l'axe fixe proportionnellement à sa distance à ce point.

Le côté AB peut être au besoin prolongé de part et d'autre des points A et B, sans que cela modifie le moment d'inertie C du triangle AOB par rapport à la droite OZ.

A l'instant initial, le triangle AOB étant immobile, on place le point matériel M au milieu de l'hypoténuse AB, et on lui donne une vitesse v_0 dirigée vers le point B.

Épreuve pratique. — 1° *Conditions pour qu'une droite soit principale d'inertie pour l'un de ses points.*

2° *Effet d'un système de percussion sur un solide mobile autour d'un axe fixe. Conditions pour que, dans le cas d'une percussion unique, cet axe ne subisse aucune réaction.*

3° *Centre de percussion d'une surface matérielle plane par rapport à une droite de son plan.*

Et 4° Centre de percussion d'un carré homogène, par rapport à une parallèle à une des diagonales.

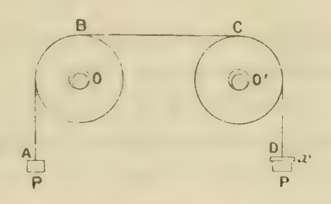
MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

QUESTION DE COURS. — *Exposer d'après Hirn la théorie physique de la machine à vapeur :*

1° *On développera en détail le cas des machines monocylindriques à condensation, sans enveloppe ni surchauffe ;*

2° *On résumera brièvement les conclusions relatives à l'emploi des enveloppes et de la surchauffe.*

PROBLÈME. — *Une corde* ABCD, *portant à ses extrémités deux poids égaux* P, *passe sur deux poulies*



identiques O *et* O', *placées dans un même plan vertical, de manière que la partie* BC *de la corde soit sensiblement horizontale.*

On demande quel poids additionnel x on doit placer en D, *après avoir donné à l'ensemble un léger mouvement pour que, sous l'action de ce poids, le mouvement se continue avec une vitesse constante.*

On négligera le poids de la corde, mais on tiendra compte du frottement des pivots dans les chapes supposées fixes, de la raideur de la corde et du poids des poulies. On rappelle la formule

$$\sqrt{y^2 + x^2} = 0,96\,X + 0,4\,Y,$$

approchée avec une erreur relative inférieure à $\frac{1}{25}$, quand Y *est inférieur à* X.

Astronomie.

Épreuve théorique. — 1° Problème de Képler. — *Déterminer, en partant des lois de Képler, les valeurs, pour une époque donnée, de l'anomalie excentrique, du rayon vecteur et de l'anomalie vraie du Soleil ; développements en séries suivant les puissances de l'excentricité, expression de l'équation du centre.*

2° *Établir les formules de la parallaxe en longitude et en latitude. On désignera par* γ_0, l_0, λ_0 *les coordonnées écliptiques du lieu d'observation, par* l, λ, P *la longitude, la latitude et la parallaxe horizontale de l'astre observé.*

Épreuve pratique. — *En une station* A, *la hauteur du centre du Soleil a été trouvée égale, toutes corrections faites, à* $41^\circ 58' 11'',6$, *à* $3^h 2^m 31^s,9$, *temps moyen de Paris. Calculer la longitude de* A, *sachant que sa latitude est de* $44^\circ 41' 8'',3$, *et que la déclinaison du Soleil est* $16^\circ 54' 56'',4$.

L'observation a été faite après le passage du Soleil au méridien. Le temps vrai à midi moyen de Paris était ce jour-là $11^h 54^m 14^s,14$, *et le lendemain à midi moyen* $11^h 54^m 20^s,56$.

Si la hauteur du Soleil est erronée de $20''$, *quelle sera l'erreur correspondante de la longitude?*

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Composition écrite. — I. *Sur des cylindres circulaires de même axe* Oz, *on considère des hélices dont les tangentes font un même angle avec l'axe commun des cylindres. On demande de déterminer le plan*

tangent, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques d'une surface qui serait engendrée par de telles hélices assujetties à la condition de passer par une droite qui coupe orthogonalement l'axe commun des cylindres.

SOLUTION RÉSUMÉE.

Les équations de la surface étant

$$(1)\qquad x = v\cos u,\qquad y = v\sin u,\qquad z = kvu,$$

on a, pour le plan tangent,

$$(2)\qquad k(u\cos u - \sin u)X + k(u\sin u + \cos u)Y - Z = 0,$$

équation indépendante de v : la surface est développable. C'est le cône

$$k^2\left[\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2\right]\operatorname{arc\,tang}^2\frac{y}{x} = 1.$$

Les lignes de courbure sont données par

$$du(k^2uv\,du + dv + k^2u^2\,dv) = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad u = c$$

et

$$(4)\qquad k^2u^2v^2 + v^2 = c_1^2.$$

Le premier système est formé des génératrices rectilignes de la surface; le second est formé des trajectoires orthogonales des précédentes, obtenues en coupant le cône par des sphères ayant leur centre au sommet du cône. L'équation (4) n'est autre que

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2.$$

Pour les lignes asymptotiques, on trouve

$$du^2 = 0,$$

ce qui donne les deux systèmes confondus avec les géné-

ratrices rectilignes, comme cela résulte évidemment de la nature de la surface considérée.

II. *Intégrer l'équation*

$$[x(x^2-y^2)+4xy^2)p-[y(x^2-y^2)-4x^2y]q=2(x^2+y^2)z,$$

et trouver une surface intégrale qui passe par le cercle

$$x^2+y^2=R^2, \qquad z=a.$$

SOLUTION.

Les caractéristiques sont données par

$$\frac{xy}{z^2}=\alpha, \qquad \frac{x^2-y^2}{z}=\beta;$$

elles rencontreront le cercle si l'on a

$$4a^2\alpha^2+a^2\beta^2=R^4;$$

d'où, pour la surface demandée,

$$4a^4x^2y^2+a^2(x^2-y^2)^2z^2-R^4z^4=0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calcul de l'aire de la portion de la sphère $x^2+y^2+z^2=2cz$ comprise à l'intérieur du cône $a^2x^2-b^2y^2=z^2$. On supposera $a^2>1$, $b^2\gtrless 1$.*

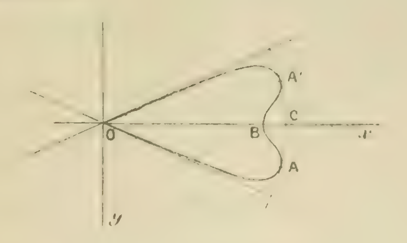
SOLUTION.

La moitié de la courbe d'intersection de la sphère et du cône se projette, sur xOy, suivant une courbe telle que OABA'O, dont l'équation est

$$R=\frac{2c\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}}{1+a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta}.$$

Elle touche le cercle décrit de O comme centre avec le rayon C de la sphère en deux points A, A', et, en

chaque point de ABA'C se projettent deux éléments de l'aire considérée.



Pour $a^2 > 1$, $b^2 < 1$, on a

$$A = 8c^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} - \frac{8c^2}{\sqrt{(1+a^2)(1-b^2)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1-b^2}{1+a^2}},$$

et pour $a^2 > 1$, $b^2 > 1$,

$$A = 8c^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} - \frac{8c^2}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}} \log \frac{b\sqrt{a^2-1} + a\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Ces formules conviennent d'ailleurs quand on suppose $a^2 < 1$.

Remarque. — En projetant les éléments sur le plan yOz, il n'y a pas de duplication à considérer.

Astronomie.

Composition écrite. — *Aberration. — Aberration annuelle, diurne. — Influence de l'aberration annuelle sur les coordonnées d'une étoile. — Influence de l'aberration diurne sur l'heure du passage d'une étoile au méridien.*

Épreuve pratique. — *Calculer pour un lieu de latitude λ la durée du jour vrai et celle du crépuscule, la déclinaison δ du Soleil étant donnée. Le crépuscule cesse quand le Soleil est à 18° au dessous de l'horizon.*

Calculer, en outre, les variations des deux durées considérées quand la déclinaison $\mathcal{D}$ du Soleil varie de $\pm 1^{\circ}$.

Données numériques

$$\lambda = 45^{\circ}\,11'\,12'',$$
$$\mathcal{D} = -\,6^{\circ}\,27'\,4'',75.$$

SOLUTION.

α angle horaire du coucher du Soleil ;

α' angle horaire du Soleil quand cesse le crépuscule. On a

$$\cos\alpha = -\tan\mathcal{D}\tan\lambda, \qquad \cos\alpha' = \cos\alpha - u,$$
$$u = \frac{\sin 18^{\circ}}{\cos\mathcal{D}\cos\lambda}, \qquad d\alpha = \frac{\tan\lambda\, d\mathcal{D}}{\sin\alpha\cos^{2}\mathcal{D}},$$
$$d\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\,d\alpha + \frac{du}{\sin\alpha'}, \qquad du = u\tan\mathcal{D}\,d\mathcal{D}.$$

On trouve

$$\alpha = 83^{\circ}.27'.53''.21 = 5^{h}33^{m}51^{s},54.$$
$$\alpha' = 109.\ 6.45,89.$$
$$\alpha' - \alpha = 25.38.52,68 = 1^{h}42^{m}35^{s},52.$$
$$d\alpha = d\alpha' = \pm 1^{\circ}1'3''.96 = \pm 4^{m}6^{s},26$$

pour $d\mathcal{D} = \pm 1^{\circ}$.

La variation de durée du crépuscule est nulle : la déclinaison donnée correspond, en effet, au minimum de la durée du crépuscule pour le lieu considéré.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un point matériel dont la masse est prise pour unité se meut sans frottement sur une surface de révolution dont l'axe est vertical et dont le méridien a pour équation, dans le plan xz,*

$$z = f(x).$$

On désigne par r et θ les coordonnées polaires de la projection du point sur le plan xy. Le point est pesant et de plus sollicité par une force située à chaque instant dans le plan du parallèle qui le contient et dont les composantes par rapport au rayon de ce parallèle prolongé et la tangente mesurée dans le sens où θ croît sont représentées par les formules

$$R = -\frac{2\mu - 2k\cos 2\theta}{r^3}, \qquad \Theta = -\frac{2k\sin 2\theta}{r^3}$$

(r rayon du parallèle).

On demande le mouvement du point. Ramener le problème à des quadratures dans le cas général et examiner le cas particulier suivant : La vitesse initiale v_0 est horizontale

$$f(x) = \frac{b^3}{x^2}, \qquad \theta_0 = 0, \qquad r_0 = a, \qquad v_0^2 = \frac{2(\mu + k - gb^3)}{a^2}$$

(g intensité de la pesanteur, b, μ et k sont positifs et l'axe Oz est dirigé en sens inverse de la pesanteur).

Dans le cas particulier, le point reste sur le parallèle a; on étudiera les diverses circonstances que peut présenter son mouvement sur ce parallèle.

Épreuve pratique. — *La poulie d'une machine d'Atwood est formée d'une couronne cylindrique de* 10cm *de rayon extérieur et de* 9cm,2 *de rayon intérieur et d'une épaisseur de* 6mm *reliée à un moyeu monté sur l'axe par quatre tiges prismatiques à base carrée de* 6mm *de côté. On la regarde comme formée seulement de la couronne et des quatre tiges que, pour simplifier, on considérera comme des droites homogènes de même masse. Le tout est en cuivre dont le poids spécifique est* 8,85. *Les deux poids égaux sont de* 200gr *et le poids additionnel de* 10gr.

On demande l'accélération du mouvement :

1° *En tenant compte de la masse de la poulie ;*

2° *En négligeant cette masse.*

On néglige les résistances passives, le poids du cordon et la gorge de la poulie.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1898. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère une sphère (S) *de rayon* R, *qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires* $Oxyz$; *et un paraboloïde* (P) *qui a pour plan directeur* xOy, *et pour directrices :* 1° *l'axe* Oz ; 2° *la droite* AB *définie par les points* A *et* B *dont les coordonnées* x, y, z *sont respectivement* (R, O, R) *et* (a, b, c).

I. *Former les équations de la sphère et du paraboloïde.*

II. *On prend un point* M *sur* Oz, *et les plans polaires* [Σ] *et* [Π] *de ce point par rapport aux surfaces* (S) *et* (P). *Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans quand* M *décrit* Oz : *déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde* (P).

III. *En supposant* AB *à* 45° *sur* Oz *et tangente à la sphère* (S) *au point* B, *dans le trièdre* $Oxyz$, *calculer les coordonnées* a, b, c *du point* B *en fonction de* R : *déterminer les génératrices du paraboloïde* (P) *qui sont tangentes à la sphère* (S) : *calculer le nombre de centièmes de la cote* c *du point* B, *quand* R *est égal à* 1.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. L'équation de la sphère S est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un point de la droite AB a pour coordonnées

$$x = \frac{R + \lambda a}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{\lambda b}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{R + \lambda c}{1 + \lambda}.$$

Une droite horizontale passant par ce point et rencontrant Oz a pour équations

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda b}{R + \lambda a}, \qquad z = \frac{R + \lambda c}{1 + \lambda}.$$

L'élimination de λ entre ces deux équations donne celle du paraboloïde P.

(P) $\quad z[bx + y(R - a)] - R[bx + y(c - a)] = 0.$

II. Soit (o, o, h) le point M. Ses plans polaires Σ et Π par rapport à S et P ont pour équations

(Σ) $\quad zh - R^2 = 0.$

(Π) $\quad h[bx + y(R - a)] - R[bx + y(c - a)] = 0.$

Le lieu de l'intersection de ces deux plans, obtenu par élimination de h, est donc

(Q) $\quad R[bx + y(R - a)] - z[bx + y(c - a)] = 0.$

C'est un paraboloïde hyperbolique Q, passant aussi par Oz et ayant aussi le plan Oxy comme plan directeur. Le reste de l'intersection comprendra donc deux génératrices parallèles à ce plan.

Or, on remarque immédiatement que l'on passe de l'équation (P) à l'équation (Q) par le simple changement de z en $\frac{R^2}{z}$. Les génératrices horizontales com-

munes seront donc celles pour lesquelles

$$z^2 = R^2 \qquad \text{ou} \qquad z = \pm R,$$

c'est-à-dire celles qui se trouvent dans les plans tangents à la sphère en ses points de rencontre avec Oz.

Cette double substitution faite dans l'une des équations (P) ou (Q) donne les équations de ces deux génératrices

$$\begin{cases} z = R \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = -R, \\ (2a - R - c)y - 2bx = 0. \end{cases}$$

III. Si la droite AB est tangente en B à la sphère, les coordonnées a, b, c de ce point B satisfont à l'équation de S et à celle du plan polaire de A par rapport à S, ce qui donne

$$(1) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad a + c = R.$$

En outre, l'angle de AB et de Oz étant égal à $45°$, dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\frac{c - R}{\pm\sqrt{(a - R)^2 + b^2 + (c - R)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ou, en tenant compte de (1) et (2),

$$(3) \qquad \frac{c - R}{R} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

De là, en remarquant que, si le point B est réel, on a $c < R$,

$$c = R\,\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

L'équation (2) donne alors

$$a = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

et l'équation (1), en remarquant que, le point B étant à l'intérieur de $Oxyz$, son y est positif

$$b = R\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Remplaçant tout de suite, dans l'expression de c, $\sqrt{2}$ par sa valeur 1,4142, on a, pour $R = 1$,

$$c = \frac{0,4142}{1,41} = 0,29.$$

Les génératrices de P tangentes à S sont celles dont la distance à O est égale à R. Pour les génératrices parallèles à xOy, que nous appellerons du *premier système*, leurs équations étant de la forme

$$z = \lambda,$$
$$y = \mu x,$$

leur distance d à l'origine est donnée par

$$d = \lambda.$$

Celles qui sont tangentes à S sont donc telles que

$$\lambda = \pm R.$$

On retrouve ainsi les deux génératrices communes à P et à Q.

L'équation (P) donne immédiatement, pour une génératrice du second système, les équations

$$bx + y(R-a) = \lambda R,$$
$$bx + y(c-a) = \lambda z,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{x - \frac{\lambda R}{b}}{a - R} = \frac{y}{b} = \frac{z - R}{\frac{(c-R)b}{\lambda}}.$$

La distance de cette génératrice à l'origine est donc

donnée par

$$d^2 = \frac{\lambda^2 R^2 - R^2(c-a)^2 - b^2 R^2}{(a-R)^2 + b^2 + \dfrac{(c-R)^2 b^2}{\lambda^2}}.$$

Écrivant que cette distance d est égale à R, chassant le dénominateur et réduisant, on a

$$\lambda^4 + \lambda^2[(c-a)^2 - (a-R)^2] - (c-R)^2 b^2 = 0,$$

ou

$$\lambda^4 + \lambda^2[c^2 - R^2 + 2a(R-c)] - (c-R)^2 b^2 = 0,$$

ou encore, en tenant compte de (1) et (2),

$$\lambda^4 + \lambda^2(a^2 - b^2) - a^2 b^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 + a^2) = 0.$$

Cette équation n'a pour racines réelles que

$$\lambda = \pm b,$$

qui donnent la droite AB, ce qui était évident *a priori*, et sa symétrique par rapport à Oz.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

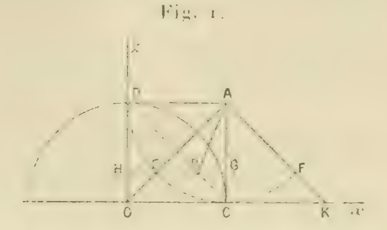
II. Le plan Σ et le plan Π pivotent, l'un autour de la droite à l'infini du plan xOy, l'autre autour de Oz, attendu que le point M étant sur le paraboloïde P, son plan polaire n'est autre que le plan tangent en M à ce paraboloïde, qui contient la génératrice Oz. En outre, ces plans, qui sont polaires d'un même point par rapport à deux quadriques, se correspondent homographiquement. Le lieu de leur intersection est donc, d'après un théorème bien connu de Chasles, une quadrique réglée. Et comme, par construction, les génératrices de cette quadrique rencontrent Oz (contenu dans le plan Π) et la droite à l'infini de xOy (contenue dans le plan Σ), ce ne peut être qu'un paraboloïde hyperbolique.

Le plan Π contient, outre Oz, la seconde génératrice du paraboloïde passant en M, c'est-à-dire la droite menée par M parallèlement à xOy et rencontrant AB en un certain point H. L'intersection du plan Π et du plan Σ est donc la parallèle NK à MH menée par le point N où ce plan Σ coupe Oz [1].

Pour que cette génératrice NK de Q soit sur P, il faut qu'elle rencontre AB, ce qui ne peut être qu'autant qu'elle se confond avec MH, c'est-à-dire que le point N se confond avec le point M. Cette circonstance ne se produit que lorsque le point M coïncide avec un des deux points de rencontre de Oz avec la sphère S.

III. Considérons une projection de la figure sur le plan zOx.

Fig. 1.



La droite AB est à l'intersection de deux cônes équilatères de sommet A, l'un ACD circonscrit à la sphère, l'autre AOK à axe vertical.

La sphère de centre A et de rayon R coupe ces cônes suivant les cercles projetés suivant les droites CD et EF, dont la rencontre donne la projection du point B, attendu que le cercle CD est sur la sphère S.

---

[1] Les points M et N étant conjugués par rapport à la sphère, et la normale en M au paraboloïde P, perpendiculaire en M au plan Π étant orthogonale à la droite NK, qui est parallèle à MH, cette normale et NK sont deux droites conjuguées par rapport à la sphère. Il résulte de là que le paraboloïde Q est polaire réciproque, par rapport à la sphère S, du paraboloïde des normales au paraboloïde P le long de la génératrice Oz.

On a, dès lors,

$$a = \mathrm{HB} = \mathrm{EG} = \mathrm{EA}\cos 45^\circ = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}},$$

$$c = \mathrm{OH} = \mathrm{OE}\cos 45^\circ = (\mathrm{OA} - \mathrm{EA})\cos 45^\circ = \frac{\mathrm{R}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}},$$

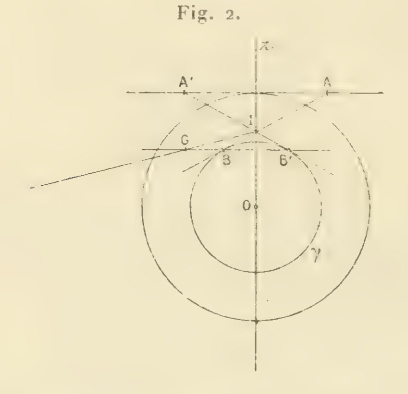
et, dans le cercle projeté suivant CD,

$$a = \sqrt{\mathrm{BD}.\mathrm{CB}} = \sqrt{\mathrm{EA}.\mathrm{OE}} = \sqrt{\mathrm{EA}(\mathrm{OA} - \mathrm{EA})} = \mathrm{R}\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Les génératrices du premier système rencontrant Oz et étant perpendiculaires à ce diamètre de la sphère S ne peuvent être tangentes à cette sphère que lorsqu'elles passent par les points où ce diamètre perce cette sphère.

Dans le second système, on a comme génératrice tangente à S la droite AB par définition. La symétrique de AB par rapport à Oz, diamètre de S, est également

Fig. 2.



tangente à cette sphère, et, comme elle rencontre les perpendiculaires à Oz, menées par les divers points de AB, c'est-à-dire les génératrices du premier système de P, elle est aussi une génératrice du second système de ce paraboloïde.

Pour voir s'il peut exister d'autres génératrices de ce système tangentes à la sphère, faisons une projection sur le second plan directeur du paraboloïde, c'est-à-dire

sur le plan mené par Oz parallèlement à AB, et appelons γ la projection commune des petits cercles de la sphère contenus dans les plans de front de AB et A′B′. La droite projetée au point I étant une génératrice du premier système, toutes les génératrices du second passeront en projection par ce point I.

Si la projection d'une de ces génératrices est intérieure à l'angle BIB′, cette génératrice rencontre la génératrice BB′ en un point situé entre B et B′, c'est-à-dire à l'intérieur de la sphère.

Si la projection est extérieure à l'angle BIB′, comme IG, par exemple, la génératrice correspondante rencontre BB′ à l'extérieur de la sphère, en dehors des plans de front de AB et A′B′; donc, le rayon du petit cercle de la sphère contenu dans le plan de front de cette génératrice est inférieur à celui de γ; par suite, la génératrice IG, extérieure au cercle γ, ne peut être tangente à ce petit cercle.

Il résulte de là que les seules génératrices du second système tangentes à S sont AB et A′B′.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES EN 1898 (DEUXIÈME SESSION).

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on donne les points $A(x = a, y = 0)$, $B(x = 0, y = b)$ et l'on considère une conique S tangente aux axes et admettant AB pour directrices :

1° Trouver l'équation du lieu E du foyer de S qui correspond à la directrice AB.

2° Trouver le lieu E dans l'hypothèse $a = b$;

Interprétations des diverses parties de ce lieu;

Démonstration géométrique.

3° Dans l'hypothèse $a > b$, reconnaître que le lieu E se décompose en une droite et une courbe C, et former l'équation de cette courbe;

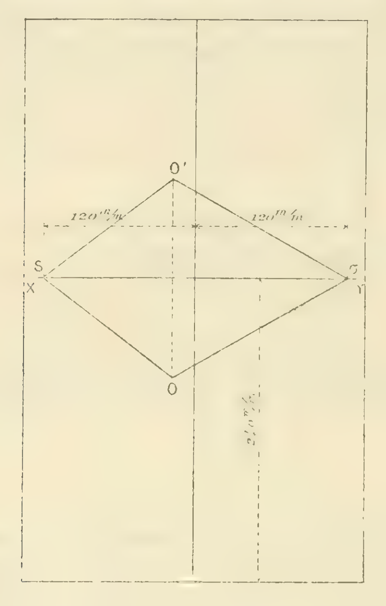
Tracer la courbe C : tangentes aux points A, B, O; asymptote.

4° Les cordes de la courbe C, vues du point O sous un angle droit, passent par un point fixe : le prouver et donner l'équation générale de ces cordes.

5° Tracé de la courbe C dans l'hypothèse $a = 2b$ (b étant arbitraire).

Épure.

Intersection de deux cônes de révolution. — Les sommets des deux cônes sont situés en S et σ sur la ligne de terre, à



égale distance du milieu de cette ligne (distance $S\sigma = 240^{\text{mm}}$). Le plan ($SO\sigma$, $SO'\sigma$) des axes qui se rencontrent en OO' est le plan bissecteur du premier dièdre.

L'axe (SO, SO') fait avec XY dans l'espace un angle de 50° et l'axe (σO, $\sigma O'$) un angle de 40°.

Le cône S est circonscrit à une sphère de centre OO' et de

50^{mm} de rayon, et le cône Σ à une autre sphère concentrique à la précédente et de 70^{mm} de rayon.

On demande de déterminer les deux projections de l'intersection de ces deux cônes, en ayant soin de mettre en évidence les constructions nécessaires à l'obtention d'un point de la courbe et de la tangente.

Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

Dans le passage à l'encre on figurera seulement en traits noirs le solide commun aux deux surfaces. Les portions enlevées aux deux cônes seront figurées en traits bleus.

Cadre de 27 sur 45. La ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 240^{mm} du côté inférieur.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.
Titre intérieur : Cônes de révolution.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

G. Nédélec. — Le Calcul vectoriel et ses applications; 1er volume. Paris, Gauthier-Villars; 1897.

Recueil des travaux techniques des officiers du Génie de l'armée belge, I. Ixelles, 1897.

J. Pichot. — Éléments de Trigonométrie rectiligne; nouvelle édition. Paris, Hachette; 1898.

Lucien Levy. — Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Journal de Mathématiques spéciales, publié sous la direction de M. G. Mariaud. Paris, Delagrave; 1898.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. G. Mariaud. Paris, Delagrave; 1898.

G. de Longchamps. — Cours de problèmes de Géométrie analytique, t. I. Paris, Delagrave; 1898.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (*J. de Crelle*), publié par L. Fuchs; B. 119. Berlin, 1898.

P. T. Pepin, S. J. — Étude sur les nombres parfaits. (Extr. des *Mem. della pont. Acc. dei Nuovi Lincei.*) Rome, 1897.

R. de Saussure. — The Geometry of fluids in motion. Washington, 1898.

Supplemento al periodico di Matematica, dirigé par G. Lazzeri. Livourne, [illegible]

Bollettino della Associazione « Mathesis », 2e année. Turin, 1898.

Revue de Mathématiques, publiée par G. Peano; t. VI. Turin, 1898.

H. Minkowski. — Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder. (Extr. des *Nachrichten der K. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen.*) 1897.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. Amsterdam, 1898.

Wiskundige opgaven. Amsterdam, 1898.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée par P.-H. Schoute, etc., t. VI; 1898.

H.-G. Zeuthen. — Note sur l'histoire des Mathématiques. (Extr. du *Bull. de l'Ac. R. des Sc. et des Lettres de Danemark*, 1897.)

Issaly. — Sur une formule de Laguerre étendue aux pseudo-surfaces. (Extr. du *Bull. de la Soc. math. de France*, 1897.)

Bibliotheca mathematica, publiée par E. Eneström. Stockholm, 1898.

A. Hurwitz. — Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen. (Extr. des *Nachrichten der K. G. der Wiss. zu Göttingen*, 1896.)

A. Hurwitz. — Ueber die Entwicklungscoefficienten der lemniscatischen Functionen. (Extr. des *Nachr. K. G. der Wiss. zu Göttingen*, 1897.)

A. Hurwitz. — Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration. (Extr. des *Nachr. der K. G. der Wiss. zu Göttingen*, 1897.)

T. Ferrari. — Una generalizzazione dei teoremi di Ceva e di Menelao. (Extr du *Periodico di matem.*, 1898.)

La Ingeniera, rédigé par Manuel A. Vila. Buenos-Aires, 1898.

Archivo de matematicas puras y aplicadas, publié par D.-L.-G. Gasco. Valence, Madrid, 1897.

G. Lazzeri e A. Bassani. — Elementi di Geometria. 2e édition. Livourne, 1898.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par E. Humbert et G. Papelier; 8e année. Paris, Nony, 1897-1898.

Wiadomosci mathematyczne, rédigé par S. Dickstein. Varsovie, 1897.

Il Pitagora, Giornale di Matematica, publié par G. Fazzari; 4e année. Avellino, 1898.

Giornale di Matematiche di Battaglini, publié par A. Capelli, vol. 36. Naples, 1898.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par C. Jordan; 5e série, t. IV. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

H. Laurent. — Théorie des opérations financières (collection des *Aide-Mémoire* de M. Léauté). Paris, Gauthier-Villars et fils, Masson.

NÉCROLOGIE.

M. Charles BRISSE.

Nous avons appris trop tard la triste nouvelle du décès de M. Ch. Brisse pour pouvoir l'annoncer dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, qui était déjà sous presse.

M. Brisse vient de succomber aux atteintes d'une longue et cruelle maladie qui, depuis deux ans, avait eu raison de son énergie et le tenait éloigné de tout travail. Ancien élève de l'École Polytechnique, où il fut admis en 1863, il était entré de bonne heure dans l'Enseignement, et il y remplit de multiples et importantes fonctions jusqu'à l'heure de sa retraite; c'est là qu'il eut occasion de montrer son incomparable puissance de travail, servie par une intelligence remarquable.

Entré en 1872 aux *Nouvelles Annales*, où il succédait à Bourget, M. Brisse fut rédacteur de ce journal, à côté de Gerono d'abord, puis ensuite de M. Rouché, jusqu'à la fin de 1895. Nos lecteurs ont pu apprécier la valeur du mathématicien que nous venons de perdre, et que beaucoup d'entre eux ont également connu comme professeur. Ils se joindront à nous pour honorer sa mémoire et pour exprimer à sa famille la grande part que nous prenons à ce deuil si cruel.

Les Rédacteurs.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898.

NOTE DE LA RÉDACTION.

Aucune réponse à la question posée n'est parvenue à la Rédaction. Exceptionnellement, et à cause de l'intérêt du sujet, il a été décidé que le Concours resterait ouvert jusqu'au 15 mars 1899, terme d'absolue rigueur. Aucun Mémoire ne serait admis après cette date.

[A3g]

SUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

On sait depuis longtemps que la substitution uniforme (x, fx) répétée indéfiniment peut converger vers une racine α de l'équation $x = fx$, pourvu que x soit pris dans un domaine convenable au voisinage du point-racine α et que fx soit holomorphe en ce point. Cette méthode employée dans certains cas par Euler, Legendre, Galois est sans doute beaucoup plus ancienne; c'est une des méthodes les plus simples d'approximations successives. Ce qu'il est beaucoup plus difficile de déterminer c'est le domaine dans lequel on peut prendre la valeur initiale; la question n'est pas encore complètement résolue. Quoiqu'il en soit ce domaine existe et l'on sait que :

1° Si le module de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$ est plus petit que 1 la substitution directe (x, fx) converge vers α;

2° Si ce module est plus grand que 1, la substitution inverse $(x, f^{-1}x)$ converge vers α;

3° Si le module de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$ est égal à 1 et si l'argument de cette dérivée est $\frac{2K\pi}{n}$ (K et n premiers entre eux), il y a n secteurs de convergence par la substitution directe, et n secteurs de convergence par la substitution inverse; ces secteurs alternent entre eux ([1]); l'on convient, quand on effectue la substitution inverse, de ne prendre parmi les diverses déterminations de $f^{-1}x$ que celle qui est contenue dans le domaine de α.

Galois a donné pour résoudre les équations algébriques une méthode d'approximations successives par les substitutions uniformes ([2]), dans laquelle on n'a jamais à faire que des opérations *rationnelles;* en ce qui concerne les équations quelconques, on peut, dans le même ordre d'idées, se proposer de calculer les racines: — *en n'effectuant que des opérations directes,* en appelant ainsi celles qui entrent dans la construction du premier membre de l'équation proposée; on n'aura jamais ainsi à faire la substitution inverse $(x, f^{-1}x)$ — *en rendant la convergence plus rapide.* La méthode suivante permet d'y parvenir; pour plus de simplicité je me borne au cas où la racine α est réelle; dans ce cas, si l'on a

$$0 < \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha < 1,$$

([1]) *C. R.*, 16 novembre 1896 et 30 juin 1897. *N. A.*, juillet 1897, février 1898.

([2]) GALOIS, *Œuvres mathématiques*.

la substitution directe converge vers α, par des valeurs croissantes, si l'on prend $x < \alpha$, par des valeurs décroissantes si l'on prend $x > \alpha$.

Si l'on a

$$-1 < \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha < 0,$$

la substitution directe converge vers α par des valeurs alternativement plus grandes et plus petites.

Dans les deux cas la convergence est très lente si la dérivée en α est voisine de 1 ou de -1; plus rapide si cette dérivée est voisine de 0.

Soit à résoudre l'équation

$$F(x) = 0;$$

posons

$$F(x) + x = fx,$$

on est ramené à

$$(1) \qquad fx = x.$$

Pour obtenir une convergence assez rapide par une substitution directe quelle que soit $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha$, il suffit de remplacer la fonction fx par une autre $\varphi(x)$ telle que l'équation $\varphi(x) = x$ admette la même racine α et que $\left(\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right)_\alpha$ soit aussi voisine de 0 que possible.

Soient α_1 et α_2 deux valeurs approchées de la racine α de (1); l'une par excès, l'autre par défaut, et β_1, β_2 les valeurs de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_{\alpha_1}$ et de $\left(\frac{dfx}{dx}\right)_{\alpha_2}$; soit k la moyenne $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$; cette moyenne est une valeur approchée de

$$K = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_\alpha.$$

Cela posé considérons l'équation

$$\varphi(x) = x + h(x - fx),$$

où h est indéterminé.

Pour $x = \alpha$, on a

$$\varphi(\alpha) = \alpha,$$

puisque $x - fx$ devient nul ; elle admet donc la même racine α.

On a

$$\frac{d\,\varphi(x)}{dx} = 1 + h\left(1 - \frac{dfx}{dx}\right),$$

et

$$\left(\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right)_\alpha = 1 + h(1 - \mathrm{K}).$$

Si l'on connaissait K, on déterminerait h de manière que cette expression fût nulle ; elle sera assez voisine de 0, si l'on fait

$$h = \frac{1}{k - 1},$$

et la substitution directe $x, \varphi x$, c'est-à-dire

$$x, \quad x + \frac{1}{k-1}(x - fx),$$

converge vers α.

Soit à résoudre

$$(\sqrt{2})^x = x.$$

Cette équation admet les deux racines réelles 2 et 4 ; on a

$$\left(\frac{dfx}{dx}\right)_2 < 1, \qquad \left(\frac{dfx}{dx}\right)_4 > 1.$$

Soient 1,7 et 2,2 deux valeurs approchées de la première ; en partant de 1,7, la substitution x, fx nous donne

$$fx = \mathrm{F}(1,7) = \sqrt{2}^{1,7} = 1,8025\ldots,$$

$$f^2 x = \sqrt{2}^{1,8025} = 1,8678\ldots,$$

$$f^3 x = \sqrt{2}^{1,8678} = 1,9104\ldots,$$

$$f^4 x = \sqrt{2}^{1,9104} = 1,9390\ldots$$

. . . .

Appliquons maintenant la méthode permettant d'obtenir une convergence plus rapide. On a

$$\beta_1 = \sqrt{2}^{-1,7} \frac{L2}{2} = 0,6246\ldots, \qquad \beta_2 = \sqrt{2}^{-2,2} \frac{L2}{2} = 0,7428\ldots,$$

$$k = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 0,6817,$$

d'où

$$\frac{1}{1-k} = 3,161.$$

On aura à faire la substitution

$$x, \quad x + 3,161 \times (fx - x).$$

En partant de la même valeur $x = 1,7$, on a

$$\varphi\,(x) = 1,7 + 3,161(1,8025 - 1,7) = 2,024,$$

$$\varphi^2(x) = 2,024 + 3,161\left(\sqrt{2}^{-2,024} - 2,024\right) = 1,9927.$$

....

Ainsi, tandis que (x, fx) nous donne après quatre substitutions 1,939 avec une erreur plus grande que 0,04, $(x, \varphi x)$ nous donne après deux substitutions seulement 1,9927 avec une erreur plus petite que 0,01; il est vrai qu'alors les substitutions sont un peu plus longues à calculer ([1]).

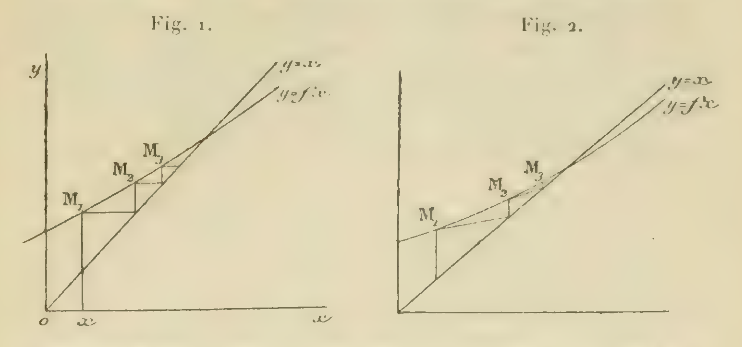
Cette méthode est moins convergente que celle de Newton comme le font ressortir les deux figures suivantes; la *fig.* 1 représente la méthode ci-dessus exposée, la *fig.* 2 représente celle de Newton appliquée au cas qui nous occupe. Dans le premier cas, nous menons par les points successivement obtenus $M_1, M_2, \ldots,$ des parallèles à OX, ayant par suite un seul point commun avec la courbe $y = fx$; dans le second nous menons

---

([1]) Cette augmentation de calculs est indépendante du coefficient angulaire, tandis que la lenteur de la convergence de (x, fx) en dépend.

des tangentes à cette courbe, ayant deux points communs avec elle. Plus généralement, comme l'a remarqué M. Laisant (²), on pourrait faire passer par ces points des

Fig. 1. Fig. 2.



courbes ayant avec fx un contact d'ordre plus élevé, et la convergence serait d'autant plus rapide ; mais alors les calculs sont plus compliqués pour chaque substitution ; et il est bien difficile de dire *a priori* quelle que soit la nature de l'équation, laquelle de ces méthodes permettrait d'arriver à une valeur approchée avec un minimum de calculs à effectuer au total. Nous n'avons pas eu d'ailleurs l'intention de proposer une nouvelle méthode d'approximation, mais seulement de montrer qu'il en existe d'assez convergentes n'exigeant que des opérations *directes*.

[D3]

SUR UNE EXTENSION D'UNE FORMULE DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. KARAGIANNIDÈS.

Considérons une aire S que nous pouvons supposer, pour fixer les idées, *simplement connexe*, dont le con-

(¹) *A. F. A. S.*, Bordeaux, 1895.

tour soit continu et ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points. Si ce contour était d'une nature plus complexe, on pourrait décomposer la région S en plusieurs autres dont chacune satisfasse à ces conditions. Cela posé, nous pouvons former une suite de polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et n en y possédant les trois propriétés suivantes : on a, quels que soient les entiers positifs ou nuls p et q :

1° $$P_{0,0} = 1;$$

2° $$\frac{dP_{p,q}}{dx} = P_{p-1,q}, \qquad \frac{dP_{p,q}}{dy} = P_{p,q-1};$$

3° $$\iint_S P_{p,q}\, dx\, dy = 0, \qquad (p^2 + q^2 > 0);$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire S; cette dernière condition signifie que la valeur moyenne de $P_{p,q}$ dans S est *nulle*. La valeur moynnne de $P_{0,0}$ est évidemment 1.

En effet, de la seconde condition il résulte aisément

$$P_{p,q} = \int_{x_0}^{x} P_{p-1,q}(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} P_{p,q-1}(x_0, y)\, dy + C,$$

pour $p = 0, 1, 2, \ldots, \infty$; $q = 0, 1, 2, \ldots, \infty$; C est une constante qu'on déterminera par la troisième condition.

Ainsi, en ayant égard à la première condition, on déterminera complètement les polynomes P en opérant successivement.

Appelons maintenant $f(x, y)$ un polynome de degré m en x et μ en y. Désignons par $|\text{moy.}\, \Phi(x, y)|$ la valeur moyenne d'une fonction $\varphi(x, y)$ dans l'aire S. On aura

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, y) = |\text{moy.}\, f(x, y)| + P_{1,0}\left|\text{moy.}\, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \\ \qquad + P_{0,1}\left|\text{moy.}\, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right| + \ldots + P_{m,n}\left|\text{moy.}\, \dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial y^n}\right|; \end{cases}$$

car, en écrivant le polynome inconnu $f(x, y)$ sous la

forme

$$f(x, y) = a_{0,0}P_{0,0} + a_{1,0}P_{1,0} + a_{0,1}P_{0,1} + \ldots + a_{m,n}P_{m,n},$$

où $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{0,1}$, ..., $P_{m,n}$ sont les polynomes que nous venons de définir, $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $a_{0,1}$, ..., $a_{m,n}$ des constantes, on déterminera ces constantes en prenant successivement les valeurs moyennes des deux membres de $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ..., dans l'aire S et en ayant égard aux conditions auxquelles satisfont les polynomes P. C'est le développement (1) qui constitue la généralisation de la belle et intéressante formule de M. Léauté pour *une seule* variable (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, juin 1881; *Cours d'Analyse* à l'École Centrale, par M. Appell, p. 216).

On peut, dans certains cas, appliquer la formule (1) au développement d'une fonction $f(x, y)$ autre qu'un polynome, quand on connait les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans l'aire S. Le second membre de la formule (1) est alors une série. Mais le développement n'est légitime que pour des fonctions spéciales $f(x, y)$ qu'il serait intéressant de caractériser, comme l'a fait Halphen pour les fonctions d'une variable auxquelles s'applique le développement de M. Léauté.

[$M^3 5 c \gamma$]

SUR LES CONIQUES QUI SONT LES PROJECTIONS D'UNE CUBIQUE GAUCHE;

Par M. Ch. BIOCHE.

1. Si l'on projette une cubique gauche sur un plan, en prenant pour centres de projection des points de

cette cubique, on obtient des coniques qui forment un système dépendant d'un seul paramètre. Ces coniques sont circonscrites au triangle formé par les points d'intersection de la cubique et du plan. On voit immédiatement :

1° Qu'il y a deux coniques du système passant par un point; ce sont les traces des cônes ayant pour sommets les extrémités de la corde de la cubique qui passe par ce point;

2° Qu'il y a quatre coniques tangentes à une droite du plan; car, par une droite, on peut mener quatre plans tangents à une cubique gauche, et les points où ces plans coupent la courbe sont les sommets des cônes dont les traces sont tangentes à la droite considérée.

En cherchant une définition de ce système de coniques, qui ne fasse pas intervenir d'éléments hors du plan, j'ai été conduit à considérer des éléments que je vais définir.

2. Étant donné un triangle ABC, si l'on mène à une conique Σ, circonscrite à ce triangle, les tangentes ayant pour points de contact A, B, C, les points A′, B′, C′ où ces tangentes coupent les côtés du triangle sont sur une droite Δ qu'on peut appeler la *droite de Pascal* correspondant à la conique.

Réciproquement, à toute droite Δ correspond une conique circonscrite à ABC, dont Δ est la droite de Pascal. Si la droite Δ a pour équation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, la conique Σ a pour équation

$$\frac{YZ}{\alpha} + \frac{ZX}{\beta} + \frac{XY}{\gamma} = 0.$$

3. De même, si l'on joint les sommets du triangle ABC aux points où une conique S, inscrite dans le triangle, touche les côtés opposés, les droites ainsi obtenues concourent en un point P qu'on peut appeler *le point de Brianchon* correspondant à la conique.

Réciproquement, à tout point P correspond une conique inscrite à ABC, dont P est le point de Brianchon. Si P a pour coordonnées α, β, γ, la conique S a pour équation ponctuelle

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} + \frac{Z^2}{\gamma^2} - 2\frac{YZ}{\beta\gamma} - 2\frac{ZX}{\gamma\alpha} - 2\frac{XY}{\alpha\beta} = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$\frac{vw}{\alpha} + \frac{wu}{\beta} + \frac{uv}{\gamma} = 0.$$

4. Soit maintenant un faisceau de coniques circonscrites à ABC :

$$(A + \lambda A')YZ + (B + \lambda B')ZX + (C + \lambda C')XY = 0;$$

pour qu'une droite

$$uX + vY + wZ = 0$$

soit droite de Pascal d'une conique du faisceau, il faut que l'on ait pour une valeur de λ

$$u(A + \lambda A') = v(B + \lambda B') = w(C + \lambda C').$$

Si l'on désigne par μ la valeur commune de ces expressions, et si l'on élimine λ et μ entre les trois équations ainsi obtenues, on a l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites de Pascal correspondant aux coniques du faisceau

$$\begin{vmatrix} Au & A'u & 1 \\ Bv & B'v & 1 \\ Cw & C'w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cette enveloppe est une conique inscrite dans le triangle et le point de Brianchon correspondant a ses coordonnées déterminées par les équations

$$(BC' - CB')x = (CA' - AC')y = (AB' - BA')z.$$

On obtient précisément les mêmes valeurs de x, y, z en cherchant la solution commune aux équations

$$AYZ + BZX + CXY = 0,$$
$$A'YZ + B'ZX + C'XY = 0,$$

pour laquelle aucune des coordonnées n'est nulle.

Donc, *les droites de Pascal des coniques qui sont circonscrites à* ABC *et qui passent par un point* D *enveloppent une conique inscrite dans* ABC *et ayant pour point de Brianchon le point* D.

5. On peut déduire de là une construction simple du quatrième point d'intersection de deux coniques circonscrites à un triangle ABC, ces coniques étant définies par leurs droites de Pascal Δ, Δ'. Il suffit de déterminer le point D de Brianchon correspondant à la conique qui est inscrite dans le triangle et touche Δ et Δ'.

Il est facile d'obtenir les propriétés corrélatives des précédentes.

6. Considérons maintenant les coniques, projections d'une cubique gauche. Les tangentes en B et C à une conique du système se correspondent homographiquement; car le sommet d'un cône contenant la cubique correspond homographiquement à chacune de ces tangentes. Donc les traces B' et C' des tangentes sur les côtés opposés déterminent sur ceux-ci des divisions homographiques. D'autre part, le point A est son propre homologue; par suite B'C', qui n'est autre que la droite de Pascal, passe par un point fixe ω.

On peut remarquer que si le centre de projection se rapproche de B, par exemple, la trace BB′ du plan tangent à ce cône a pour position limite la trace du plan osculateur, et lorsque le centre de projection est en B, la droite CC′ se confond avec CB. Donc la droite de Pascal a même position limite que BB′ et le point ω est sur les traces des plans osculateurs en ABC à la cubique. Il résulte de là que :

Les projections d'une cubique gauche sont des coniques circonscrites à un triangle telles que les droites de Pascal correspondantes passent par un point fixe.

7. Si l'on se donne un système de coniques possédant les propriétés précédentes, il y a une infinité de cubiques admettant ces coniques comme projections ; pour préciser le degré d'indétermination, je vais montrer que par deux points il passe deux de ces cubiques.

Deux coniques Σ_1, Σ_2, projections d'une cubique, se coupent aux points A, B, C, traces de la cubique sur le plan, et en un point D, trace de la ligne des sommets des cônes projetants. J'ai montré que ce point D était le point de Brianchon d'une conique S inscrite dans ABC et admettant pour tangentes les droites de Pascal de Σ_1 et Σ_2.

Par suite, si l'on suppose donnés le triangle ABC et le point ω, on peut prendre arbitrairement deux points O_1, O_2 ; la trace D de O_1O_2 sur le plan ABC détermine une conique S ayant D pour point de Brianchon. Les deux tangentes menées de ω à S peuvent être prises comme droites de Pascal de deux coniques Σ_1, Σ_2. Les cubiques, intersections des cônes $O_1\Sigma_1$, $O_2\Sigma_2$ ou des cônes $O_1\Sigma_2$, $O_2\Sigma_1$, ont pour projections le système des coniques qui sont circonscrites à ABC et dont les droites de Pascal passent par ω.

8. Si deux sommets du triangle ABC étaient imaginaires, on pourrait cependant construire facilement la droite de Pascal correspondant à une conique. Supposons que A soit le point réel; le point A′ où la tangente en A coupe BC est un point de la droite de Pascal; de plus, si P est le pôle de BC par rapport à la conique, le côté BC et la droite de Pascal divisent harmoniquement AP, car ces trois droites sont les diagonales du quadrilatère complet formé par AB, AC, BB′, CC′.

9. D'ailleurs, on peut donner une autre propriété caractéristique du système des coniques considérées. En se reportant à la démonstration faite pour établir que la droite de Pascal passe par un point fixe, on voit que le lieu du pôle de BC par rapport aux coniques du système est une conique passant par ABC et admettant ω pour pôle de BC. Donc, on peut dire que :

Les projections d'une cubique gauche sont des coniques circonscrites à un triangle et telles que le lieu du pôle d'un côté par rapport à ces coniques soit une conique circonscrite au triangle.

10. Cette propriété donne des conditions sous forme très simple dans certains cas; par exemple, si l'on considère un système de cercles passant par un point A, la condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles soient les projections d'une cubique gauche est que leurs centres soient sur un cercle passant par A. Le centre de ce dernier cercle est le point d'intersection des plans osculateurs en A, B, C à toute cubique admettant comme projections les cercles du système.

[Q4a]

REMARQUE SUR L'APPLICATION DE LA LOGIQUE A LA THÉORIE DES RÉGIONS;

Par M. DUMONT.

On sait que la théorie du syllogisme donnée par Euler (*Voir* Janet, *Cours de Philosophie*) repose sur la possibilité, trois propriétés A, B, C étant données, qu'un objet peut posséder ou ne pas posséder, de représenter par des cercles tracés dans un même plan tous les cas possibles.

Mais si, généralisant et considérant un nombre quelconque de propriétés, on cherche une représentation complète des cas, on voit que le cercle ne suffit plus. En effet, d'après une formule donnée par Steiner, le nombre maximum de régions déterminées dans un plan par n cercles est

$$2 + n(n-1),$$

parmi lesquelles une est infinie. Or, le nombre des cas possibles, étant données n propriétés A, B, ... indépendantes les unes des autres est évidemment 2^n; de sorte que, dès que n atteint 4, le nombre maximum des régions est inférieur au nombre des cas. Pour $n = 4$, la différence est 2; pour $n = 5$, elle est 10.

Si l'on considère l'espace à trois dimensions et, dans cet espace, des sphères, on aura une représentation complète pour le cas de $n = 4$; le nombre maximum des régions est, en effet, dans ce cas, d'après Steiner

$$2n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Pour $n = 4$, il est donc 16. Mais, dès que n dépasse 4, la représentation est incomplète. Pour $n = 5$ par exemple, le nombre maximum des régions est 30, tandis que celui des cas est 32.

Si, au lieu de la circonférence ou de la sphère, on emploie la droite ou le plan, la représentation complète cesse plus tôt. Ainsi, 3 droites dans le plan ne donnent que 7 régions, et 4 plans dans l'espace que 15 régions.

Mais, d'après la formule donnée par M. Cahen (voir *Nouvelles Annales*, décembre 1897), la représentation (si toutefois cette expression peut s'employer ici) est toujours possible dans les espaces supérieurs. Le nombre des régions déterminées dans un espace à p dimensions par n variétés à $p - 1$ dimensions est, en effet,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots(p-1)} + \ldots + \frac{n}{1} + 1,$$

et ce nombre est égal à 2^n si n est $\leqq p$.

Ainsi, dans le cas de n propriétés, il suffira d'avoir recours à l'espace à n dimensions.

Il est probable que les variétés analogues à la circonférence et à la sphère permettraient de se contenter d'un espace à $n - 1$ dimensions.

CORRESPONDANCE.

P.-H. Schoute. — *Sur un théorème de M. G. Gallucci.*

M. G. Gallucci a démontré (*N. A.*, p. 74; 1898), d'une manière élégante, le théorème suivant :

Deux tangentes quelconques d'une conique à centre et

les perpendiculaires abaissées des foyers sur ces tangentes touchent une autre conique.

Voici une démonstration plus simple de ce théorème :

Du point d'intersection des deux tangentes comme centre, décrivons une circonférence de cercle coupant sous des angles droits le cercle, lieu des projections des foyers sur toutes les tangentes. Alors les projections des foyers sur une quelconque des deux tangentes sont évidemment des points conjugués par rapport au premier cercle. Donc les deux triangles à un sommet situé à l'infini, formés par une quelconque des deux tangentes et les perpendiculaires abaissées des deux foyers, sont des triangles polaires de ce cercle. Donc les six côtés des deux triangles enveloppent une autre conique et les six sommets de ces deux triangles se trouvent sur une troisième conique, etc.

N. B. — On remarque aisément que la série doublement infinie des coniques, dont les six côtés des couples de triangles sont les tangentes, ne contient que des coniques concentriques à la conique donnée et admet pour cercle orthoptique commun le cercle, lieu des projections des foyers de la conique donnée sur ses tangentes.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Caen.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Étant donné le système différentiel orthonome*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + u, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

trouver toutes les formes de la fraction φ *qui rendent ce système passif, et, dans ce cas, indiquer le nombre*

et la forme des éléments arbitraires dont dépend l'intégrale générale.

En différentiant deux fois la première équation par rapport à y, une fois la seconde par rapport à x et égalant les résultats, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (x + y + u)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} = \varphi.$$

Cette équation, qui doit être satisfaite en regardant x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial y}$ comme des variables indépendantes a pour intégrale

$$\varphi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{F}\left(y, \frac{1 + x + y + u}{e^x}\right).$$

Quand le système est passif, son intégrale générale dépend de deux constantes arbitraires.

II. *Étant donné un système d'axes rectangulaires* OXYZ, *déterminer toutes les surfaces réglées* S, *dont les génératrices rencontrent* OZ *et telles que leurs deux systèmes de lignes de courbure se projettent sur* OXY *suivant deux systèmes de lignes orthogonales.*

Il faut que les lignes de courbure d'un système aient leurs tangentes parallèles à OXY et, par suite, soient contenues dans des plans parallèles à OXY sur chacun desquels le plan tangent S fait un angle constant avec OZ. Or, si les génératrices de S coupent OZ en des points différents, le plan tangent en ces points contient OZ et S est cylindrique : on n'échappe à cette conclusion que si toutes les génératrices coupent OZ au même point : S est un cône et l'on voit aisément qu'il est de révolution.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (x-1)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + xu = 0,$$

déterminer l'intégrale telle que, si on la développe suivant la série de Maclaurin, les termes qui ne contiennent pas à la fois x et y aient pour somme $\cos x + \sin y$. *On remarquera que l'équation peut s'écrire*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + (x-1)u\right] + \frac{\partial u}{\partial y} + (x-1)u = 0.$$

Intégrant, on détermine les fonctions arbitraires en faisant x ou y nuls, et l'on trouve

$$u = e^{(1-x)y}\left[\cos x - e^{-x}\left(\frac{x}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x-1}\right)\right] + e^{-x}\left[\frac{x\cos y + (2-x)\sin y}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x-1}\right].$$

Mécanique.

I. *Un point* M, *de masse* 1, *glisse sans frottement sur la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \mathrm{F}(v);$$

il est attiré vers OZ *par une force* $\omega^2 a$, ω *et* a *désignant des constantes. Former les équations générales du mouvement. Déterminer la fonction* F *de telle sorte que, pour un cas particulier de ce mouvement on puisse avoir* $u = a\omega t$; *indiquer, dans ce cas, la forme de la surface et de la trajectoire.*

Une des équations de Lagrange et l'intégrale des forces vives donnent

$$u'' - uv'^2 = -a\omega^2, \qquad u'^2 + [u^2 + \mathrm{F}'^2(v)]v'^2 = h - 2a\omega^2 u.$$

Si l'on a $u = a\omega t$, la première donne $v'^2 = \frac{\omega}{t}$ et l'on tire aisément de l'intégrale des forces vives

$$F'(v) = \frac{a\sqrt{3}}{4}\, v\sqrt{k^2 - v^2}, \qquad z = \frac{a}{4\sqrt{3}}\left[k^3 - (k^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

La surface est un conoïde dont on voit la forme en cherchant sa trace sur un cylindre de révolution autour de OZ.

II. *Soit* S *un cube homogène dont chaque arête est égale à* $2a$. *On demande de former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'un des sommets* O, *en prenant pour axes coordonnés les trois arêtes qui aboutissent à ce sommet : axes principaux et moments principaux en ce point.*

Le cube, d'abord en repos, peut tourner librement autour du point O, *qui est fixe : il reçoit une percussion parallèle à* OX *en un point de coordonnées* $0, a, \frac{5}{3}a$. *Déterminer le mouvement de* S *après le choc et dans la suite des temps en supposant qu'aucune force extérieure n'agisse sur lui.*

Équation de l'ellipsoïde d'inertie

$$\frac{8}{3}Ma^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2Ma^2(yz + zx + xy) = 1.$$

Prenons les moments des quantités de mouvement par rapport à OX, OY, OZ.

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}p_0 - q_0 - r_0\right) = 0,$$

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}q_0 - r_0 - p_0\right) = \frac{5}{3}aP,$$

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}r_0 - p_0 - q_0\right) = -aP.$$

$$p_0 = \frac{3}{11}\frac{P}{Ma}, \qquad q_0 = \frac{8}{11}\frac{P}{Ma}, \qquad r_0 = 0.$$

S prend ensuite un mouvement de Poinsot correspondant au cas où deux des moments principaux sont égaux.

Épreuve pratique. — *Sur une circonférence de* 2^m *de rayon, située dans un plan vertical, se meut un point pesant* M *de telle sorte que le carré de sa vitesse au point le plus bas soit double du carré de la vitesse au point le plus haut. Calculer, à* $0^s,01$ *près, le temps que met* M *à parcourir la circonférence. On néglige les résistances passives et l'on prend* g *égal à* $9^m,809$.

$$T = \frac{1}{\sqrt{3g}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\cos\theta}{3}}} = 1^s,18.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une courbe* C, *on demande de déterminer ses développées, c'est-à-dire les courbes dont les tangentes sont normales à la courbe* C; *cas où cette dernière est plane.*

II. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{(1 - x^2)^3}\, dx.$$

III. *Démontrer que l'hyperbole* H, *définie en coordonnées cartésiennes par les équations*

$$x + y = 0, \qquad yz = 2,$$

est une courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$z - px - qy - 1 - pqx^2y^2 = 0.$$

où p et q désignent, suivant l'usage, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *par rapport aux variables indépendantes x et y, de la fonction z. Établir que les surfaces intégrales de cette équation qui passent par* H *sont inscrites le long de cette hyperbole dans un même cylindre dont on demande l'équation.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^3 + y^3 = axy.$$

Cette courbe présente une boucle et une branche infinie.

Calculer l'aire de la boucle.

Calculer l'aire comprise entre la branche infinie et son asymptote.

Considérant la boucle comme la section droite d'un cylindre, calculer le volume de la portion de cylindre comprise entre le plan des xy et le paraboloïde qui a pour équation

$$az = xy$$

en coordonnées rectangulaires.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *En supposant connues les équations générales du mouvement des systèmes sous la forme que leur a données Lagrange, savoir*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m,$$

on demande d'indiquer sommairement la marche à suivre pour arriver à la forme hamiltonienne ou canonique, dans le cas où cette forme peut être obtenue.

Montrer que la solution de tout problème de Dynamique dépend, dans ce cas, de la connaissance d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

II. *Montrer qu'une parabole du second degré est une courbe brachistochrone pour une force constante, répulsive, émanant du foyer.*

Épreuve pratique. — *Calculer le moment d'inertie d'un cylindre homogène circulaire droit, relativement à une droite perpendiculaire à l'axe. On donne le rayon de base du cylindre* R, *la hauteur* H, *la densité* ρ.

La droite est située à une distance a *de l'axe et à une distance* b *de l'une des bases.*

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. *Méthodes générales de transmission des rotations uniformes entre deux axes quelconques par le contact de deux surfaces.*

Construction générale des engrenages à roulement. Engrenages de White.

II. *Un plan mobile* Q *glisse sur un plan fixe* P *de façon que deux droites du plan* Q *restent constamment tangentes à deux cercles du plan* P.

1° *Trouver les deux roulettes;*

2° *Montrer que toute droite du plan* Q *enveloppe un cercle du plan* P;

3° *Montrer que le mouvement du plan* Q *peut, d'une infinité de façons, s'obtenir en faisant mouvoir un angle droit de manière que chacun de ses côtés passe par un point fixe.*

Astronomie ou Mécanique céleste.

Épreuve écrite. — I. *Exposer les principes de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour l'étude du mouvement de translation des planètes.*

II. *Précession des équinoxes (on fera abstraction de la nutation). Valeurs de la précession annuelle en ascension droite et en déclinaison. Détermination des coordonnées moyennes d'une étoile à une date* t, *en supposant connues les coordonnées moyennes de la même étoile à une autre date* t_0.

Épreuve pratique. — *L'anomalie vraie d'une planète à un certain instant est*

$$315^\circ 1' 23'', 02,$$

le logarithme du rayon vecteur mené du Soleil à la planète

$$0,3259877,$$

l'inclinaison de l'orbite

$$13^\circ 6' 44'', 10,$$

la distance du périhélie au nœud

$$241^\circ 10' 20'', 57,$$

la longitude du nœud

$$171^\circ 7' 48'', 73.$$

On demande la longitude et la latitude de la planète par rapport à l'écliptique et la projection du rayon vecteur sur l'écliptique.

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Une courbe est représentée, par rapport à trois axes rectangulaires, par les équations*

$$x = \beta \cos \alpha t - \alpha \cos \beta t,$$
$$y = \beta \sin \alpha t + \alpha \sin \beta t,$$
$$z = \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} t.$$

1° *Démontrer que c'est une hélice;*

2° *Former et simplifier l'équation du plan normal. Déterminer le centre et le rayon de la sphère osculatrice. Démontrer que ce centre décrit également une hélice;*

3° *Calculer les rayons de courbure et de torsion. Déterminer le centre de la circonférence osculatrice.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée*

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^2 - by^2;$$

examiner les divers cas qui se présentent lorsque a et b prennent des valeurs quelconques positives ou négatives.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Deux points matériels pesants, de masses m et m', sont reliés par un fil élastique de masse négligeable. Lorsque le fil n'est pas tendu, sa longueur est a; s'il est tendu de manière à prendre la longueur l $(l > a)$, on admet que sa tension est égale à $\lambda^2(l - a)$, λ^2 étant une constante. On place le fil verticalement et on le tend de manière à lui donner*

la longueur $2a$; puis, l'un des points étant maintenu fixe, on imprime à l'autre une vitesse horizontale égale à $\omega\lambda\sqrt{\frac{m+m'}{mm'}}$, ω étant une constante, et l'on abandonne le système aux forces qui le sollicitent. On demande d'étudier le mouvement que prend le système.

Nota. — S'il arrive, dans le cours du mouvement, que le fil reprenne sa longueur naturelle a, il sera inutile de poursuivre l'étude du mouvement.

Épreuve pratique. — Ox, Oy, Oz *sont des axes rectangulaires. Un conoïde est engendré par une droite qui reste parallèle au plan des xy, rencontre l'axe des z et s'appuie sur le cercle*

$$x = a, \qquad y^2 + z^2 = a^2.$$

Déterminer le centre de gravité du volume homogène limité par la surface du conoïde et les deux plans $x = a$, $x = 2a$.

Nota. — On démontrera les formules fondamentales qui serviront au calcul numérique.

Certificat d'Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — *On adjoint à un corps de nombres donné Ω une ou plusieurs quantités algébriques α, β, γ, ... racines d'équations dont les coefficients appartiennent à Ω. Établir les principales propriétés du nouveau corps $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ ainsi obtenu. Corps conjugués, corps normaux. Éléments primitifs. Corps primitifs ou imprimitifs.*

Épreuve pratique. — *Appliquer la théorie de Galois à l'équation du quatrième degré.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — 1° *Quelles sont les corrections fondamentales à faire subir aux observations astronomiques, étoiles, astres mobiles, pour comparer celles-ci aux éphémérides?*

2° *Indiquer sommairement l'effet de chacune des causes considérées;*

3° *Étudier spécialement l'une d'elles et donner les formules qui s'y rapportent.*

Épreuve pratique. — *Connaissant les coordonnées équatoriales des étoiles*

$$\alpha \text{ Lion } \mathcal{R} = 10^h\ 2^m 21^s{,}0, \qquad \mathcal{D} = -12^\circ 31'\ 9''{,}0;$$
$$\alpha \text{ Bouvier } \mathcal{R} = 14^h 10^m 30^s{,}0, \qquad \mathcal{D} = +19^\circ 46' 16''{,}0,$$

trouver le temps sidéral α *et la distance zénithale* z, *au passage au méridien de Montpellier du milieu,* M, *de la distance angulaire* 2δ *des deux étoiles*

Latitude de Montpellier $\lambda = 46^\circ 13' 16''$.

Lyon.

Analyse.

I. *On considère les courbes* C *qui satisfont à la relation différentielle*

$$x\,dy - y\,dx = a\,ds, \qquad a = \text{paramètre const.}$$

1° *Démontrer que les normales principales de* C *rencontrent l'axe des* z;

2° *Former l'équation* E *aux dérivées partielles des surfaces qui admettent les courbes* C *pour lignes de plus grande pente, par rapport au plan des* xy;

3° *Intégrer* E;

4° *Étudier les caractéristiques de* E.

II. *Soit l'intégrale*

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}.$$

1° *Trouver les points critiques ;*

2° *Établir les formules fournissant les diverses valeurs de l'intégrale ;*

3° *Exprimer* y *en* x *au moyen de la fonction elliptique* $\wp$ *de Weierstrass convenablement choisie.*

SOLUTIONS.

I. 1° Si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, les trois dérivées secondes x'', y'', z'' sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale principale. Or, différentions la relation

$$x\,dy - y\,dx = a\,ds \qquad \text{ou} \qquad xy' - yx' = a;$$

il viendra

$$xy'' - yx'' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Sur une surface, l'équation différentielle des lignes de plus grande pente est

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il vient ainsi pour E

$$xq - yp = a\sqrt{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)},$$

car

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2;$$

3° Dans l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

les relations différentielles qui fournissent les caracté-

ristiques sont

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad X = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \cdots .$$

Ici

$$Z = 0, \qquad X = q, \qquad Y = -p,$$

d'où

$$p\,dp + q\,dq = 0.$$

Des deux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} qx - py = a\lambda\sqrt{1 + \lambda^2} \\ p^2 + q^2 = \lambda^2 \end{array} \right\} \lambda = \text{const.},$$

on tire

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{-ay\sqrt{1 + \lambda^2} + x\sqrt{x^2 + y^2 - a^2(1 + \lambda^2)}}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{ax\sqrt{1 + \lambda^2} + y\sqrt{x^2 + y^2 - a^2(1 + \lambda^2)}}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dz}{\lambda} = \frac{p\,dx + q\,dy}{\lambda}$$

$$= \frac{(x\,dy - y\,dx)a\sqrt{1 - \lambda^2} + (x\,dx + y\,dy)\sqrt{x^2 + y^2 - a^2(1 - \lambda^2)}}{x^2 + y^2}.$$

Prenons les coordonnées semi-polaires z

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \text{arc tang}\frac{y}{x}.$$

On aura

$$\frac{z + b}{\lambda} = a\theta\sqrt{1 + \lambda^2} + 2\int \frac{dr}{r}\sqrt{r^2 - a^2(1 + \lambda^2)}.$$

Une quadrature élémentaire fournit une intégrale complète aux deux paramètres λ et b.

4° Le long d'une caractéristique $p^2 + q^2 =$ const., la normale à la surface fait un angle constant avec l'axe des z, etc.

La discussion géométrique complète est intéressante. Je la signale au lecteur.

On verra notamment que sur les surfaces cherchées la plus courte distance de la normale et de l'axe des z est inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la normale et l'axe des z.

II. On peut écrire

$$\frac{1}{2}x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4}}.$$

On a l'intégrale classique de Weierstrass aux deux modules $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. On retombe sur une question de cours.

Rennes.

Analyse.

Épreuve théorique. — 1° *x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque M d'une courbe C, trouver les expressions des coordonnées X, Y, Z du point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante de cette courbe. Quelle doit être, en fonction de l'arc S, l'expression du rapport $\frac{R}{T}$ du rayon de courbure au rayon de torsion de la courbe C pour que sa surface rectifiante soit un cylindre ou bien un cône.*

On montrera que, dans le premier cas, la courbe C est une hélice et que, dans le second, toutes les tangentes sont également éloignées d'un point fixe.

2° *Établir la série de Lagrange pour le développement selon les puissances de α d'une fonction donnée de l'une des racines de l'équation*

$$u = x - \alpha\varphi(u).$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} - 8y = x^2(1 + 3\,\mathrm{L}x).$$

Astronomie.

Épreuve théorique. — *Exposer la théorie des systèmes optiques; expliquer le progrès de la précision des* visées *réalisé par l'emploi des* lunettes.

Discussion du bénéfice d'une lunette astronomique au point de vue de la clarté, sous divers grossissements.

Épreuve pratique. — *Connaissant les éléments du mouvement elliptique d'une comète périodique et son anomalie excentrique, calculer le rayon recteur, la longitude et le temps écoulé depuis le dernier passage au périhélie.*

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}\right),$$

et expliquer comment sa connaissance peut conduire à celle de toutes les intégrales de la même équation.

II. *Trouver la fonction d'une seule variable, $f(x)$, non identiquement nulle, qui jouit de la propriété exprimée par l'identité*

$$f(yz) = z f(y) + y f(z).$$

Prouver a priori *qu'elle ne peut être olotrope en* $x = 0$.

Mécanique.

I. *Démontrer les équations de Lagrange.*

II. *Un tube rectiligne infiniment mince de longueur* L *peut tourner autour d'un axe vertical passant par une de ses extrémités et auquel il est perpendiculaire. La masse est* M. *Une bille pesante, de masse* m, *est placée dans le tube à une distance* a *de l'axe. On donne au système une vitesse de rotation* x *autour de l'axe et l'on demande le mouvement qui se produira.*

Déterminer, en particulier, au bout de combien de temps la bille quittera le tube.

Épreuve pratique. — *Un système d'axes* Ox, Oy *est venu occuper une nouvelle position* O$'x'$, O$'y'$. *Les coordonnées de* O$'$ *par rapport à* Ox, Oy *sont* $a = 3$, $b = 2$; *l'angle de* O$'x'$ *avec* Ox *est de* 120°. *On sait que l'on peut amener les axes* Ox, Oy *à coïncider respectivement avec* O$'x'$, O$'y'$ *par une rotation autour d'un certain point du plan. On demande de calculer les coordonnées de ce point par rapport aux axes* Ox, Oy *et* O$'x'$, O$'y'$.

Astronomie.

Étude du mouvement des planètes autour du Soleil.

Épreuve pratique. — *En un lieu dont la latitude est* 39°5′54″, *on a observé dans le premier vertical une étoile dont la déclinaison est* 39°5′20″. *On demande de calculer son angle horaire et sa distance énithale.*

Poitiers.

Astronomie.

Composition. — *Taches du Soleil. — Rotation du Soleil. — Révolution apparente.*

Épreuve pratique. — *Les coordonnées géocentriques de la planète Mars sont : longitude $123^\circ 53' 55'', 2$; latitude $+1^\circ 47' 17'', 58$; la longitude du Soleil au même instant a pour valeur $228^\circ 46' 28'', 4$. Sachant que la longitude du nœud ascendant de la planète est $48^\circ 46' 28'', 4$, calculer l'inclinaison de l'orbite.*

Mécanique rationnelle.

Composition. — *Étudier le mouvement d'un point matériel, non pesant, assujetti à demeurer sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe de révolution; il est sollicité, perpendiculairement au cercle de gorge, par une attraction inversement proportionnelle au cube de sa distance au plan $\frac{2m}{z^3}$, et il part d'une hauteur h avec une vitesse tangente au parallèle et égale à $\frac{\sqrt{2}}{h}$.*

Limites du déplacement dans le sens des z. — Temps d'une période. — Réaction de la surface.

Épreuve pratique. — *Calculer le moment d'inertie d'un anneau engendré par un hexagone régulier tournant autour d'un axe perpendiculaire à un diamètre joignant deux sommets opposés. On donne la distance a du centre C à l'axe et le côté R de l'hexagone. On calculera simplement le moment d'inertie relatif à*

l'axe de révolution

$$a = 1^{\text{m}},50, \qquad R = 0^{\text{m}},50;$$

la densité est supposée égale à 1.

Analyse.

Composition. — *Trouver les courbes planes rapportées à des axes rectangulaires et telles que la distance de l'origine à la tangente (en un point quelconque) étant multipliée par la somme des normales terminées aux axes, on obtienne un produit constant* a^2.

Trouver les surfaces rapportées à trois plans rectangulaires et telles que la distance de l'origine au plan tangent étant multipliée par la somme des trois normales terminées aux plans coordonnés, on obtienne un produit constant a^2.

Chercher s'il existe une ou plusieurs surfaces telles que, pour $x = 0$, $z = \sqrt{b^2 - y^2}$. *Examiner le cas où* $b^2 = \frac{a^2}{2}$.

Épreuve pratique. — *Intégrer le système*

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{d^2y}{dt^2} - 6x - 7y = 7 + 2t,$$

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{d^2y}{dt^2} - 8x \quad 10y = 10 + 4t.$$

Nancy.

Certificat d'Analyse supérieure

Épreuve écrite. — *On donne l'équation*

$$y^3 - 3y + 2\varphi(x) = 0.$$

$\varphi(x)$ désignant un polynome entier sans racine multiple :

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction algébrique y? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points ;*

2° *Former l'équation différentielle linéaire et homogène* (E) *d'ordre minimum à laquelle ces branches satisfont ;*

3° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de l'équation* (E)? *Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux ; vérifier que, parmi ces points, ceux α qui sont points ordinaires pour la fonction algébrique y sont toujours à apparence singulière pour l'équation* (E) ;

4° *Quelle est la forme analytique des intégrales fondamentales dans le domaine d'un point singulier distinct des points α? Retrouver, en partant de cette forme, les développements des racines demandés dans la première partie ;*

5° *Soit l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y\,dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{\varphi(x)}},$$

où α désigne un des points à apparence singulière précédemment considérés, y étant une branche de la fonction algébrique définie par l'équation primitive ; dire de quelle nature est le point α relativement à cette intégrale.

SOLUTION.

Les points singuliers de y sont les racines de

$$\varphi(x)^2 - 1 = 0;$$

si x_0 est, par exemple, une racine de

$$\varphi(x) - 1 = 0,$$

l'équation donnée a, pour $x = x_0$, une racine simple égale à -2 et une racine double égale à 1; les développements en série des branches dans le domaine de x_0 sont de la forme

$$y = -2 - \frac{2}{9}\varphi'(x_0)(x - x_0) - \frac{8\varphi'(x_0)^2 - 27\varphi''(x_0)}{243}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$y = 1 + \sqrt{-\frac{2}{3}\varphi'(x_0)}\,(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{9}\varphi'(x_0)(x - x_0)$$
$$+ \frac{5\varphi'(x_0)^2 - 27\varphi''(x_0)}{162\sqrt{-\frac{2}{3}\varphi'(x_0)}}(x - x_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

L'équation différentielle (E) est

$$9\varphi'(\varphi^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 9[\varphi\varphi'^2 - (\varphi^2 - 1)\varphi'']\frac{dy}{dx} - \varphi'^3 y = 0;$$

elle a comme points singuliers : 1° les zéros α de φ' qui sont à apparence singulière, avec 0 et 2 comme racines de l'équation déterminante, si α est zéro simple, ou bien 0 et $p + 1$ si α est zéro d'ordre p; 2° les zéros de $\varphi^2 - 1$ qui sont des points singuliers algébriques, avec 0 et $\frac{1}{2}$ comme racines de l'équation déterminante, dans le domaine d'un zéro simple, ou bien 0 et $\frac{p}{2}$ dans le domaine d'un zéro d'ordre p.

Dans le domaine d'un point α, y est développable en série de la forme

$$y = A_0 + A_p(x - \alpha)^p + \ldots,$$

où p est entier égal ou supérieur à 2; on en conclut que α est un pôle simple pour l'intégrale de l'énoncé.

Certificat de Géométrie supérieure.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et la sphère fixe* S *définie par l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-1=0.$$

1° *Le lieu du centre d'une sphère variable* Σ *assujettie à couper orthogonalement la sphère* S *et à passer par un point donné* p *est un plan* P ;

2° *Le lieu du point* p *pour lequel le plan* P *correspondant est tangent à la quadrique* Q *définie par l'équation*

$$Ax^2-By^2+Cz^2-1=0$$

est une surface du quatrième ordre Γ ;

3° *La normale en un point* p *de la surface* Γ *va passer par le point où le plan* P *qui lui correspond touche la quadrique* Q ;

4° *Si l'on suppose que* Q *est une quadrique variable assujettie à passer par l'intersection de la sphère* S *et de la quadrique fixe*

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0,$$

il y a trois positions de la surface Γ *qui passent par un point donné* p_0 *de l'espace. Démontrer que ces trois surfaces* Γ *se coupent deux à deux à angle droit au point* p_0 ;

5° *Déduire géométriquement de là les lignes de courbure des surfaces* Γ.

II. *Une surface hélicoïde est définie par les équations*

$$x=\cos u\cos v,$$
$$y=\cos u\sin v,$$
$$z=\sin u+v$$

Calculer la différentielle d'un arc de courbe tracée sur cette surface; déterminer les trajectoires orthogonales des hélices $u =$ const. et déterminer de nouvelles coordonnées u_1 et v_1 fonctions de u et v de façon que les courbes $u_1 =$ const. et $v_1 =$ const. soient composées des hélices et des trajectoires précédentes, et constituent un réseau isotherme sur la surface.

SOLUTION.

I. Si x, y, z sont les coordonnées du point p, l'équation du plan P est

$$2xX + 2yY + 2zZ - (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0,$$

et celle de la surface Γ est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right) = 0;$$

c'est une cyclide; on vérifie immédiatement la propriété de la normale en un point p.

Lorsque la quadrique Q fait partie du faisceau

$$(a + \lambda)x^2 + (b + \lambda)y^2 + (c + \lambda)z^2 - (1 + \lambda) = 0,$$

la cyclide a pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4(1 + \lambda)\left(\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda}\right) = 0;$$

par un point de l'espace en passent trois, deux à deux orthogonales, et leurs intersections respectives sont lignes de courbure pour chacune d'elles.

II. On a

$$ds^2 = du^2 + 2\cos u\, du\, dv + (1 + \cos^2 u)\, dv^2;$$

en écrivant

$$ds^2 = (1 + \cos^2 u)\left(dv + \frac{\cos u}{1 + \cos^2 u}\, du\right)^2 + \frac{du^2}{1 + \cos^2 u},$$

et

$$dv_1 = dv - \frac{\cos u}{1 + \cos^2 u} du.$$

d'où

$$v_1 = v - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + \sin u}{\sqrt{2} - \sin u},$$

les courbes $v_1 =$ const. sont les trajectoires orthogonales des hélices ; il suffit ensuite d'écrire

$$ds^2 = (1 + \cos^2 u)\left[dv_1^2 + \frac{du^2}{(1 + \cos^2 u)^2}\right],$$

et

$$du_1 = \frac{du}{1 + \cos^2 u},$$

d'où

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang} u}{\sqrt{2}};$$

pour obtenir

$$ds^2 = \frac{2 - 2 \operatorname{tang}^2 u_1 \sqrt{2}}{1 + 2 \operatorname{tang}^2 u_1 \sqrt{2}}(du_1^2 + dv_1^2);$$

de sorte que les courbes $u_1 =$ const. et $v_1 =$ const. constituent un réseau isotherme sur la surface.

Certificat de Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Étudier le mouvement permanent d'un fluide incompressible homogène se mouvant à l'infini parallèlement à une direction donnée, avec une vitesse de translation constante donnée lorsqu'on suppose qu'une sphère rigide homogène fixe donnée est plongée dans le fluide.*

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE; par *Henri Weber*, professeur de Mathématiques à l'Université de Strasbourg. Traduit de l'allemand sur la deuxième édition par *J. Griess*, ancien élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne. — PRINCIPES. RACINES DES ÉQUATIONS. GRANDEURS ALGÉBRIQUES. THÉORIE DE GALOIS. Un beau Volume grand in-8 de XII-764 pages; 1898. 22 fr.

EXTRAIT DE LA PRÉFACE.

Le développement pris par l'Algèbre dans ces dernières années semble justifier une exposition d'ensemble des diverses théories de cette Science et de leurs multiples applications, même après le livre de Serret, si excellent pour l'époque où il a été publié.

J'ai réfléchi depuis des années au sujet de cette entreprise, dont la grandeur et l'étendue ont exigé bien des travaux préparatoires. Ce n'est qu'après avoir parcouru plusieurs fois tout le domaine de l'Algèbre dans mes Leçons d'Université, et après avoir traité certaines parties d'une façon plus détaillée, que je me suis décidé à la rédaction de l'Ouvrage dont voici le premier Volume.

Mon intention a été d'écrire un livre d'enseignement qui n'exige du lecteur que peu de connaissances préliminaires, tout en le faisant pénétrer dans l'Algèbre moderne, en le conduisant jusqu'aux parties élevées et difficiles où l'on commence vraiment à éprouver un vif intérêt pour le sujet. Les connaissances nécessaires, aussi bien celles d'ordre élémentaire que celles d'ordre supérieur, devaient résulter du développement même des théories, afin que l'exposition fût aussi indépendante que possible d'autres Traités.

Deux théories ont acquis une importance toute particulière pour le progrès de l'Algèbre moderne : d'une part, la théorie

des groupes, qui tend de plus en plus à dominer les sujets les plus divers, et contribue à répandre partout l'ordre et la lumière; en second lieu, la théorie des nombres. Quoique l'Algèbre s'étende bien au delà de la théorie des nombres, qu'elle touche à bien d'autres domaines, par exemple à la théorie des fonctions, et même à la Géométrie par ses applications, c'est pourtant la théorie des nombres qui fournit le meilleur exemple pour toutes les considérations algébriques; les problèmes de cette théorie qui excitent aujourd'hui un intérêt particulier sont avant tout de nature algébrique. La route à suivre dans mon travail m'était donc tout indiquée.

Cette énorme matière est répartie en deux Volumes. Le premier Volume contient la partie élémentaire de l'Algèbre, qu'on peut désigner par l'expression usuelle de Calcul littéral, les règles pour la détermination du nombre et de la valeur des racines d'une équation, enfin l'exposé de la théorie de Galois.

Le second Volume, qui, je l'espère, suivra le premier à courte distance, contiendra la théorie générale des groupes finis, la théorie des groupes de substitutions linéaires et leur application à différents problèmes particuliers; il se terminera par la théorie des nombres algébriques : j'ai tenté d'y réunir les différents points de vue sous lesquels on a considéré cette théorie jusqu'à présent.

Leçons sur la théorie des fonctions, exposé des éléments de la théorie des ensembles, avec des applications à la théorie des fonctions; par *Émile Borel*, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. Un volume grand in-8; 1898. 3 fr. 50 c.

EXTRAIT DE LA PRÉFACE.

Le titre que j'ai cru devoir adopter est assez vague pour qu'il ne me semble pas inutile de donner quelques explications sur l'objet de ces *Leçons* (¹). Les dimensions de ce petit Livre me dispensent, je l'espère, de dire que ce n'est point un

(¹) A quelques modifications près, ces Leçons sont la reproduction de conférences faites à l'École Normale au printemps de 1897.

Traité complet sur une branche des Mathématiques dont l'étendue s'accroît chaque jour. Ce n'est pas non plus un exposé nouveau des principes de la théorie; ces principes, rendus classiques en France par la publication du célèbre Cours autographié de M. Hermite, ont été exposés depuis dans plusieurs Ouvrages [1], qu'il n'y a pas lieu de remplacer.

Mais la lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire œuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable. De ce nombre est la théorie des ensembles : c'est à elle qu'est consacré cet Ouvrage. J'ai tenu cependant à lui donner le titre de *Leçons sur la théorie des fonctions*, car, en parlant des ensembles, j'ai cherché à ne jamais perdre de vue les applications.

Ce n'est pas que je méconnaisse le très haut intérêt que présente par elle-même la théorie des ensembles; mais il m'a paru qu'il y avait lieu de distinguer nettement cet intérêt philosophique de l'utilité pratique de la théorie, c'est-à-dire de son lien avec d'autres parties des Mathématiques. Aussi ai-je laissé de côté bien des résultats intéressants obtenus par divers géomètres au sujet des ensembles, parce que je n'aurais pu en donner d'applications ici même.

Les trois premiers Chapitres sont un exposé des éléments de la Théorie des ensembles; j'ai cherché à les rendre aussi

---

[1] En se bornant aux livres écrits en français, on peut citer le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, le *Traité des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk, et aussi l'excellent *Cours d'Analyse de l'Université de Lille*, par M. Demartres. Ces divers Ouvrages ne sont pas d'ailleurs exclusivement consacrés à la Théorie des fonctions. On doit signaler à part le *Cours d'Analyse* de M. Méray, où le savant professeur de Dijon expose cette théorie d'une manière systématique à un point de vue qui lui est personnel. Ce point de vue a de nombreuses analogies avec celui de Weierstrass, mais M. Méray a édifié sa théorie à une époque où Weierstrass n'avait pas encore publié ses plus importants résultats, et s'était contenté de les faire connaître dans son enseignement.

accessibles que possible, en supposant chez le lecteur un minimum de connaissances.

Les trois derniers Chapitres contiennent des applications à la Théorie des fonctions : j'ai, cette fois, supposé connus certains résultats qui sont établis dans l'un quelconque des Ouvrages cités il y a un instant et semblent, par suite, pouvoir être regardés comme classiques.

Je n'ai d'ailleurs pas cherché à remplacer la lecture des Mémoires originaux mais seulement à la faciliter; aussi ai-je laissé des lacunes qu'il aurait été aisé de combler en transcrivant presque textuellement un certain nombre de pages de tel ou tel Mémoire : il y a toujours avantage, pour le lecteur qui désire approfondir une question, à recourir lui-même au Mémoire original.

Cours de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. *Darboux*, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — Leçons de Trigonométrie rectiligne, par M. *C. Bourlet*, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. Un volume in-8.

Quoique faisant partie d'un cours élémentaire, les Leçons de Trigonométrie de M. Bourlet s'adressent à la fois aux élèves de la classe de Mathématiques élémentaires et à ceux de Mathématiques spéciales.

Dans une courte *Introduction*, l'auteur expose les rudiments de la Théorie des segments et de celle des projections qui sont nécessaires dans la suite.

Le Livre I contient ensuite les définitions et les formules fondamentales de la Trigonométrie rectiligne exposées avec un soin méticuleux.

Tout ce qui se rattache aux tables trigonométriques, à leur emploi et à la résolution des équations trigonométriques fait l'objet du second Livre.

Le troisième est réservé à la résolution des triangles et aux applications classiques.

Dans un Appendice, M. Bourlet a placé tous les compléments nécessaires aux élèves de Mathématiques spéciales : représentation trigonométrique des imaginaires, formule de Moivre

division générale des arcs, équation binome et résolution trigonométrique de l'équation du 3e degré.

On voit, en somme, que cet Ouvrage est très complet. L'auteur paraît avoir surtout cherché, d'une part, à mettre beaucoup d'ordre dans son exposition et, d'autre part, à y introduire des idées générales. Il évite toujours avec le plus grand soin les méthodes détournées et donne toujours la préférence à la voie naturelle analytique, même si elle est moins élégante. C'était, à coup sûr, un des meilleurs moyens de faciliter la lecture de l'Ouvrage.

Signalons en terminant une petite innovation. Pour éviter des longueurs de discours, M. Bourlet a employé, comme on le fait d'ailleurs depuis longtemps dans la théorie des fonctions doublement périodiques, la locution d'*arcs congrus* pour désigner deux arcs égaux à un multiple de 2π près. C'est une abréviation commode et qui lui permet de garder toujours une grande précision dans le langage.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 929.

(1869, p. 192).

NOTE

Par la Rédaction.

Il s'agit d'une série qui exprime le nombre $\frac{2}{\pi}$; la question était attribuée à Catalan. Dans la *N. C. M.*, 1876, p. 272, celui-ci a fait connaître que la formule en question est due à M. Bauer (*J. de Crelle*, t. 56, p. 110).

Question 1716.

(1896, p. 103.)

On considère une série de coniques semblables qui ont même corde normale NN' (N *et* N' *sont des points fixes*). *Chercher l'enveloppe de ces coniques et le lieu de l'extrémité de la corde de courbure au point* N.

(Cl. Servais.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Rappelons d'abord les formules générales suivantes.

Soit la conique d'équation

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si l'on pose

$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - 2BDE - F(B^2 - AC)}{AC - B^2},$$

et si α^2 et β^2 sont les carrés des demi-axes de la conique (1), on a

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{(A + C)F_1}{AC - B^2},$$

$$(3)\qquad \alpha^2\beta^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

Si les coniques (1) sont toujours semblables, on peut poser $\alpha = \beta k$. Alors (2) et (3) deviennent

$$\beta^2(1 + k^2) = -\frac{(A + C)F_1}{AC - B^2},$$

$$\beta^4 k^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

D'où, en éliminant β^2,

$$(4)\qquad \frac{(1 + k^2)^2}{k^2} = \frac{(A + C)^2}{AC - B^2}.$$

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine en N, la tangente en N étant l'axe des x, et la normale NN' l'axe des y. En posant $NN' = a$, l'équation de la conique de l'énoncé est

$$(5)\qquad Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay = 0.$$

En posant $\dfrac{(1 + k^2)^2}{k^2} = \dfrac{1}{m}$, l'équation (4) devient pour la conique (5),

$$(6)\qquad B^2 + A + m(A - 1)^2 = 0.$$

1° *Enveloppe des coniques* (5). — En portant la valeur B déduite de (5) dans (6), on obtient une équation du second degré en A. En exprimant que les deux racines de cette équation en A sont égales, on trouve la quartique

$$(7)\quad m(x^2 + y^2)^2 - a(1 - 2m)x^2y - 2amy^3 + a^2my^2 = 0.$$

2° *Lieu de l'extrémité de la corde de courbure en* N. — N étant le point où la conique est normale à NN', si

$$y - px = 0$$

représente l'équation de la corde de courbure, l'équation du cercle osculateur en N est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay + \lambda y(y - px) = 0,$$

avec les conditions

$$A = \lambda - 1, \qquad 2B = \lambda\mu.$$

Par suite,

$$\lambda = A + 1, \qquad \mu = \frac{2B}{A+1}.$$

L'équation de la corde de courbure est donc

$$(8) \qquad y = \frac{2B}{A+1} x.$$

On aura le lieu de l'extrémité de cette corde de courbure en éliminant A et B en éliminant (5), (6) et (8). De (5) et (8) on tire A et B que l'on porte dans (6). On trouve ainsi que le lieu est la sextique

$$(9) \qquad \begin{cases} 4mx^2(x^2+y^2+ay)^2 + y^2(x^2+y^2-ay)^2 \\ \qquad\qquad - 4ax^3y(x^2+y^2) = 0. \end{cases}$$

Remarque. — I. Si $k = 1$, alors $m = \frac{1}{4}$. Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$(x^2+y^2-ay)^2 = 0,$$
$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-ay)^2 = 0.$$

En effet, dans ce cas, les coniques (5) se réduisent toutes au cercle

$$x^2+y^2-ay = 0.$$

décrit sur NN' comme diamètre.

II. On trouverait aisément les questions suivantes, qui découlent des propriétés énoncées :

1° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont le rayon de courbure en N est minimum;

2° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont l'aire est minima;

3° Le lieu du centre des coniques (5) est une quartique;

4° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec les tangentes parallèles à NN' est une quartique;

5° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec la tangente perpendiculaire à NN' est une quartique.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. Cl. Servais.

Soit P un point quelconque, on mène NP et l'on élève au point N sur cette droite une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la droite N'P au point P'. Ce point est le correspondant du point P dans la transformation quadratique de deuxième espèce ([1]). Donc lorsque P décrit une droite (D) le point P' décrit une conique (C) normale à la droite NN' au point N et passant par N'. Sur NN', comme diamètre, décrivons un cercle; ce cercle correspond à la droite de l'infini; soient R et S les points réels ou imaginaires, où la droite (D) rencontre ce cercle; N'R et N'S seront parallèles aux asymptotes de (C). Si les coniques (C) sont semblables, l'angle RN'S est constant et l'enveloppe de (D) est un cercle ω concentrique au cercle NN'. Par conséquent, l'enveloppe de toutes les coniques est la transformée du cercle ω ou une quartique circulaire ayant N pour point de rebroussement, N' pour point double et la droite de l'infini pour tangente double. La tangente au point N est perpendiculaire à NN', et les tangentes au point double N' sont les droites qui joignent N' aux points de rencontre de la perpendiculaire à NN' au point N avec le cercle ω. N est donc un nœud dans le cas des ellipses et un point isolé dans le cas des hyperboles.

Du point N abaissons sur (D) une perpendiculaire rencontrant cette droite au point H, et le cercle NN' en un point I appartenant à (C), comme étant le correspondant à l'infini de la droite (D). La droite IN' est l'intersection du cercle NN' avec (C), donc elle est parallèle à la corde de courbure au point N ([2]). L'extrémité de cette corde est donc le point H' correspondant du point H. Mais H décrit un limaçon de Pascal vu que la droite RS est tangente au cercle ω: donc H' décrit la transformée quadratique de deuxième espèce de cette courbe.

La méthode employée a donné la construction, point par point, des courbes cherchées; elle donne aussi la construction des tangentes à ces courbes.

([1]) Voir *Mathesis*, t. VII, p. 188.

([2]) *Id.*, t. VIII, p. 33.

LISTE DES QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES »

RESTÉES SANS SOLUTION AU 31 DÉCEMBRE 1898 [1].

62	583	798	947	1256	1438	1522	1617	1687	1756
126	585	804	967	1305	1439	1523	1628	1688	1761
193	589	805	989	1307	1440	1527	1629	1689	1762
261	592	812	999	1310	1441	1528	1630	1690	1763
266	593	815	1000	1321	1442	1530	1631	1691	1765
333	596	820	1004	1355	1443	1531	1632	1692	1770
360	597	821	1007	1359	1444	1532	1633	1693	1773
383	598	829	1008	1361	1445	1548	1634	1694	1775
400	604	846	1013	1363	1446	1549	1647	1695	1776
424	606	848	1015	1364	1447	1551	1650	1704	1777
434	607	851	1035	1365	1448	1552	1652	1705	1779
439	617	852	1042	1366	1471	1564	1655	1710	1782
448	643	859	1058	1371	1479	1571	1656	1715	1783
480	666	861	1063	1376	1483	1576	1657	1721	1784
495	693	880	1074	1390	1485	1579	1660	1730	1785
496	703	882	1078	1392	1486	1580	1661	1731	1790
512	718	884	1092	1393	1490	1582	1662	1733	1795
513	724	885	1105	1394	1491	1585	1664	1738	1796
516	729	888	1107	1402	1502	1588	1672	1742	1799
525	730	891	1108	1403	1503	1596	1676	1745	1805
528	731	892	1149	1416	1505	1599	1677	1747	1809
546	732	893	1206	1430	1508	1600	1678	1751	1810
549	772	909	1234	1432	1510	1609	1680	1752	1811
554	774	937	1236	1433	1511	1614	1685	1754	
573	791	938	1246	1435	1519	1616	1686	1755	

[1] Les lecteurs sont invités à signaler les erreurs qui pourraient exister encore dans ce relevé, malgré l'attention avec laquelle on l'a établi, et les rectifications dont il a été l'objet. La Rédaction les remercie à l'avance des communications qu'ils voudront bien lui faire à ce sujet.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XVII, 3e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

A. Algèbre élémentaire ; théorie des équations algébriques et transcendantes ; groupes de Galois ; fractions rationnelles ; interpolation.

Pages.

A3c Sur les équations à coefficients rationnels ; par M. *R. Dedekind* (traduit par M. *L. Laugel*) 201
A3g Sur le calcul des racines des équations par approximations successives ; par M. *E.-M. Lémeray* 534
A3k Remarque au sujet de la question de Concours des *Nouvelles Annales* en 1896 ; par M. *E. Malo* 128
A3l Sur les expressions dites *surpuissances;* par M. *D. Gravé* 80

B. — Déterminants ; substitutions linéaires ; élimination ; théorie algébrique des formes ; invariants et covariants ; quaternions ; équipollences et quantités complexes.

B1a Remarques sur une matrice ; par M. *L. Ravut* 118
B2a Sur un système remarquable de n relations entre deux systèmes de n quantités ; par M. *G. Fontené*. 317
B4f Représentation géométrique de l'invariant absolu et des covariants d'une forme biquadratique ; par M. *Lacour* 341
B9a Sur l'une des formes canoniques de l'équation des surfaces cubiques ; par M. *Dumont* 503

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral ; applications analytiques ; quadratures ; intégrales multiples ; déterminants fonctionnels ; formes différentielles ; opérateurs différentiels.

Pages.

C1b Sur les dérivées d'une fonction algébrique ; par M. *D. Sintsof* 411

C2k Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques sous forme finie ; par M. *Julius Petersen* 6

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires ; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique ; nombres de Bernoulli ; fonctions sphériques et analogues.

D2c Note sur la formule $\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$; par M. *H. Padé* 312

D3 Sur une extension d'une formule de M. Léauté ; par M. *Karagiannidès* 539

E. — Intégrales définies, et en particulier intégrales eulériennes.

E5 Sur les intégrales de Fresnel ; par M. *Godefroy* 205

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

F2a Sur les fonctions elliptiques de première espèce ; par M. *E. Jaggi* 367

G. — Fonctions hyperelliptiques, abéliennes, fuchsiennes.

G6c Sur les expressions dites *surpuissances* ; par M. *D. Gravé* 80

H. — Équations différentielles et aux différences partielles ; équations fonctionnelles ; équations aux différences finies suites récurrentes.

Pages.

H2a Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques sous forme finie; par M. *Julius Petersen* 6

H11 Sur la convergence des substitutions uniformes; par M. *E.-M. Lémeray*............................ 75

H11 L'intégration par l'itération et le calcul des fonctions itératives; par M. *Ferber*........................ 509

I. — Arithmétique et théorie des nombres ; analyse indéterminée ; théorie arithmétique des formes et des fractions continues ; division du cercle ; nombres complexes, idéaux, transcendants.

I2c Sur quelques théorèmes d'Arithmétique; par M. *C. Moreau* 293

I12b Sur les formes arithmétiques linéaires à coefficients réels quelconques; par M. *A. Hurwitz* (traduit par M. *L. Laugel*)................................... 64

J. — Analyse combinatoire ; Calcul des probabilités ; Calcul des variations ; Théorie générale des groupes de transformations (en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P) ; théorie des ensembles de M. Cantor.

J4a Sur la convergence des substitutions uniformes; par M. *E.-M. Lémeray*.......................... 75

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères) ; Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère ; Géométrie descriptive ; perspective.

K9a Application des méthodes de Grassmann; centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone; par M. *F. Caspary* 389

Pages.

K14b Quelques remarques sur le théorème d'Euler concernant les polyèdres; par M. *Em. Weill*............. 120

K20e Sur la règle des analogies de M. Lemoine; par M. *Charles Michel*........................... 24

K23a Construction de la perspective conique d'une sphère; par M. *M. d'Ocagne*.......................... 44

L[1]. — Coniques.

L[1]1a Sur la discussion de l'équation des coniques; par M. *L. Ripert*................................ 329

L[1]7d Sur une propriété focale des coniques; par M. *G. Gallucci*................................ 74

L[2]. — Quadriques.

L[2]1a Sur la discussion de l'équation des quadriques; par M. *L. Ripert*................................ 413

L[2]5b Relation entre les axes d'une section centrale d'un ellipsoïde et la distance du centre au plan tangent en l'un des sommets de la section; par M. *Lacour*. 272

M[1]. — Courbes planes algébriques.

M[1]2e Sur un quadrangle mobile; par M. *G. Fontené*..... 101

M[1]3e Sur une nouvelle méthode de recherche des centres dans les courbes et surfaces algébriques; par M. *S. Mangeot*................................ 215

M[1]8a Notes bibliographiques; par M. *Haton de la Goupillière*................................ 153

M[2]. — Surfaces algébriques.

M[2]2e Sur une nouvelle méthode de recherches des centres dans les courbes et surfaces algébriques; par M. *S. Mangeot*................................ 215

M[2]3d Sur une certaine surface du troisième ordre; par M. *Ch. Bioche*................................ 111

M[2]3f Sur l'une des formes canoniques de l'équation des surfaces cubiques; par M. *Dumont*............... 503

M[2]4b Réduction à la forme canonique des formules qui

Pages.

donnent, en fonction rationnelle de deux paramètres, les coordonnées d'un point de la surface de Steiner; par M. *E. Lacour* 499

M^{2}4d Sur la surface de Steiner; par M. *E. Lacour* 437

M^{2}4$i\gamma$ Sur la surface de l'onde; par M. *Lacour*............ 266

M^{2}7a Évaluation géométrique de l'ordre de la surface réglée définie par trois directrices d'ordres m, n, p; par M. *E. Bally* 508

M^3. — Courbes gauches algébriques.

M^{3}5cγ Sur les coniques qui sont les projections d'une cubique gauche; par M. *Ch. Bioche*................. 541

M^{3}5hβ Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1897; par M. *E. Duporcq*................................ 53

M^{3}5hβ Note sur le deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1897; par M. *Gallucci*................. 422

M^4. — Courbes et surfaces transcendantes.

M^{4}e Notes bibliographiques; par M. *Haton de la Goupillière* 153

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

O2q Sur la détermination des courbes par une équation entre les distances tangentielles de leurs points à des courbes données; par M. *M. d'Ocagne*........ 115

O2q Sur les raccordements par arcs de cercles; par M. *M. d'Ocagne*.................................. 314

O4dα Sur l'hyperboloïde osculateur à une surface réglée le long d'une génératrice; par M. *E. Duporcq*....... 106

O5l Note sur les géodésiques du cône; par M. *H. Piccioli*.. 207

O5m Conséquence d'un théorème sur les congruences pseudo-sphériques; par M. *G. Candido*........... 275

O6aα Projection orthogonale sur une surface de révolution; par M. *G. Pirondini* 240

P. — Transformations géométriques ; homographie ; homologie et affinité ; corrélation et polaires réciproques ; inversion ; transformations birationnelles et autres.

Pages.

P1b Sur une certaine famille de courbes algébriques; par M. *H.-E. Timerding*.............................. 351

P1c Sur un cas particulier de la transformation homographique; par M. *X. Antomari*.................. 489

P2a Sur l'application du principe de dualité aux théorèmes de Géométrie plane; par M. *L. Ripert*........... 446

Q. — Géométrie. Divers; Géométrie à *n* dimensions; Géométrie non euclidienne. Analysis situs; Géométrie de situation.

Q4a Remarque sur l'application de la logique à la théorie des régions; par M. *Dumont*...................... 547

R. — Mécanique générale ; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie ; Dynamique; Mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

R2b Sur la généralisation des théorèmes de Guldin; par M. *Kuscow* 209

R2b Application des méthodes de Grassmann; centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone; par M. *F. Caspary*................................... 389

R4b Sur une intégrale d'un problème d'équilibre d'un fil flexible et inextensible; par M. *M. Lagoutinsky*.. 149

R8cγ Sur le mouvement d'une barre qui s'appuie sur deux droites dépolies; par M. *A. de Saint-Germain*.... 307

V. — Philosophie et histoire des Sciences mathématiques. Biographies de Mathématiciens.

V1a A propos de la définition du nombre; par M. *H. Laurent* 277

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Pages.

Compositions (session de juillet 1897) :

Paris 156
Rennes 163

Compositions (session de novembre 1897) :

Besançon 163
Caen 164
Dijon 167
Grenoble 168
Lille 173
Lyon 175
Marseille 219
Montpellier 223
Nancy 225
Paris 228
Rennes 232
Toulouse 233

Compositions (session de juillet 1898) :

Caen 549
Dijon 563
Grenoble 516
Lille 512
Lyon 559
Marseille 467
Montpellier 557
Nancy 566
Paris 462
Poitiers 565
Rennes 562
Toulouse 553

Questions de concours.

Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1898; composition de Mathématiques 427
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1898; composition de Mathématiques; épure 332
Concours général de 1898; Mathématiques spéciales 331
Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1898. 424
École centrale des Arts et Manufactures; concours de 1897 (1re session) 177

Pages.

École centrale des Arts et Manufactures; concours de 1898 (1re session)........ 428
École centrale des Arts et Manufactures; concours de 1898 (2e session)........ 529
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1898; composition de Mathématiques; solution; par M. *Philbert du Plessis*........ 522
Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1896; solution de la question de Mathématiques élémentaires; par M. *Grossetête*........ 130
Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1896; solution du problème de Mécanique rationnelle; par M. *E. Fouyé*........ 237

Correspondance.

M. M. d'Ocagne : Sur un théorème de M. *Tarry*........ 47
M. G. Fontené : Sur la règle des analogies, et sur la question 1749........ 92
M. E.-M. Lémeray : Au sujet d'un Mémoire d'Euler........ 139
M. L. Ripert : Sur les centres des courbes........ 333
M. P.-H. Schoute : Sur un théorème de M. *G. Gallucci*........ 548

Bibliographie.

Laguerre : Œuvres, t. I........ 93
Cor et Riemann : Traité d'Algèbre élémentaire; compte rendu par M. *H. Padé*........ 139
Ch. Briot : Leçons d'Algèbre, revues par M. *E. Lacour*; compte rendu par M. *A. Tresse*........ 143
Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1898........ 145
G. Milhaud : Le Rationnel........ 145
E. Goursat : Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes; compte rendu par M. *E. Borel*........ 280
E. Mougin : Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales. 283
G. Milhaud : Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique........ 284
J. Tannery et J. Molk : Éléments de la théorie des fonctions elliptiques........ 430
H. Weber : Traité d'Algèbre supérieure, traduction française par *J. Griess*........ 572
E. Borel : Leçons sur la théorie des fonctions........ 573
C. Bourlet : Leçons de Trigonométrie rectiligne........ 575
Publications récentes........ 146, 285, 334 et 531

Variétés.

Pages.
Prix Lobatchefsky (premier concours, 1897); par M. *A. Vassilief* 137

Divers.

Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1897; résultat. 5
Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1898; renseignements bibliographiques complémentaires 5
Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1898; sujet.. 197
Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1898; note 245
Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1899; sujet.... 485
Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1898; note... 534
Congrès de Zurich.......... 46
Congrès international des mathématiciens à Paris, en 1900.... 245
Nécrologie : M. Gauthier-Villars 100
Nécrologie : M. Ch. Brisse.......... 533

Questions proposées.

62.......... 98
126, 187, 193.......... 99
261, 266.......... 147
324, 333 148
359, 360.......... 194
383 195
399, 400.......... 291
414, 424.......... 292
1786 99
1787 à 1790 148
1791 à 1796.......... 195
1797 à 1799 244
1800 292
1801 à 1804 340
1805 à 1807.......... 388
1808 à 1811.......... 483

Solutions de questions proposées.

41, par M. *C.-A. Laisant* 179
48, par M. *C.-A. Laisant* 180
156, par M. *C.-A. Laisant* 180

Pages.
176, par M. *C.-A. Laisant* 181
187, par M. *Donon* 182
199, par M. *C.-A. Laisant* 186
243, par M. *C.-A. Laisant* 187
324, par M. *Gardès* 433
341, par M. *C.-A. Laisant* 188
399, par *les Rédacteurs* 436
414, par M. *Gardès* 433
625 (note) 196
831, par M. *P. Sondat* 190
929 (note) 576
1298 (rectification) 99
1384, par M. *A. Droz-Farny* 94
1529, par M. *F. Ferrari* 94
1539, par M. *E. Bally* 48
1540, par M. *E. Bally* 49
1556, par M. *H. Lez* 336
1584, par MM. *A. Bulh, J. Franel* 338
1663, par M. *J. Destoux* 385
1667, par M. *H. Lez* 386
1673, par M. *H. Lez* 477
1697, par M. *A. Droz-Farny* 478
1699, par M. *A. Droz-Farny* 479
1703, par M. *A. Droz-Farny* 481
1716, par MM. *E.-N. Barisien, Cl. Servais* 577
1717, par M. *G. Gallucci* 582
1749, par M. *E. Brand* 50
1749, par M. *G. Fontené* 92
1767, par MM. *V. Retali, A. Mannheim* 285
1780, par M. *Dulimbert* 192
1781, par *un abonné* 193

Note relative aux questions non résolues 196

Liste des questions des *Nouvelles Annales* restées sans solution au 31 décembre 1898 580

Errata ou rectifications .... 52, 99, 196, 461 et 488

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME XVII, 3e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

Abel, 6, 22, 23, 367.
Allégret, 154.
E. Amigues, 385.
F. Amodeo, 155.
Ampère, 282.
Amstein, 155.
D. André, 246.
X. ANTOMARI, 489.
Apollonius, 479.
P. Appell, 120, 245, 272, 273, 476, 541.
Archimède, 166.
Atwood, 521.
Audibert, 186.
J.-F. d'Avillez, 193.
E. BALLY, 48, 50, 508.
E. Bally, 186.
E.-N. BARISIEN, 148, 340, 388, 484, 577.
E.-N. Barisien, 155, 186, 386, 477, 479, 481.
Bauer, 576.
Ch. Berdellé, 436.
Bernoulli, 145.
Bessel, 145.
Bezout, 145.
L. Bianchi, 275.
CH. BIOCHE, 111, 541.
O. Bonnet, 111.
E. BOREL, 81, 283.
E. Borel, 573.
Bouquet, 273.
Bourget, 533.
C. Bourlet, 151, 281, 510, 511, 575, 576.
Boutin, 155.
Bradley, 473.
E. BRAND, 51.
Brianchon, 543, 544, 545.
C. Briot, 143, 273.
Ch. Brisse, 533.
H. Brocard, 94, 154, 155.
A. BUHL, 338.
Cahen, 548.
CAILLET, 292.
G. CANDIDO, 275.
G. Cantor, 69, 71.
Cardan, 476.
E. Carvallo, 389.
F. CASPARY, 389.
Cassini, 181, 182.
E. Catalan, 180, 576.
Cauchy, 140, 280, 281, 282, 431.
A. Cayley, 366.
A. CAZAMIAN, 195, 292.
E. Cesàro, 95, 137, 138, 154, 155, 338.
CHASLES, 99.
Chasles, 182, 186, 526.
du Chatenet, 154.
Chemin, 504.
Chomé, 106, 110.
Clebsch, 112, 503.
Cor, 139, 140, 141.

Crelle, 64, 66, 75, 272, 503, 576.
Dandelin, 132.
G. Darboux, 144, 246, 275, 277, 281, 282, 389, 390, 575.
R. Dedekind, 201.
R. Dedekind, 204.
Ch. Delaunay, 398.
Demartres, 574.
J. Destoux, 385.
J. Destoux, 475.
Donon, 182.
D. Doubiago, 138.
A. Droz-Farny, 94, 340, 479, 481.
Duhem, 5.
Dulimbert, 192.
Dumont, 547.
E. Duporcq, 53, 106.
E. Duporcq, 5, 246, 422.
Eckardt, 112.
Enneper, 207.
Euler, 80, 81, 120, 124, 125, 126, 127, 128, 139, 302, 304, 305, 455, 457, 460, 534, 547.
E. Fauquembergue, 99.
H. Fehr, 389.
Ferber, 509.
Fermat, 180, 302.
F. Ferrari, 95.
Feuerbach, 457, 460.
G. Fontené, 92, 101, 317, 340.
G. Fontené, 51, 137, 138.
G. Fouret, 48, 49, 154.
E. Fouyé, 237.
J. Franel, 339, 484.
Franke, 75.
Fregier, 453.
Fresnel, 205, 275.
Frobenius, 66.
G. Gallucci, 74, 195, 422, 482.
G. Gallucci, 548.
Galois, 535, 558, 572, 573.
Gardès, 433.
Gauss, 141, 144, 145.
Gauthier-Villars, 100.
Genocchi, 141.
E. Genty, 436.
L. Gérard, 137, 138, 509.
Gergonne, 51.
Gerono, 533.
R. Gilbert, 148.
P. Gilbert, 155.
Girod, 140.
Godefroy, 205.
Godefroy, 483.
Goldbach, 180.
Goubet, 235.
E. Goursat, 120, 280, 281, 282, 283.
Grassmann, 389, 390, 391.
D. Gravé, 80, 139.
W.-J. Greenstreet, 192.
J. Griess, 572.
Grossetête, 130.
Guldin, 209, 213.
J. Gysel, 410.
Halphen, 154, 541.
Haton de la Goupillière, 153.
Haton de la Goupillière, 154.
Ch. Henry, 99.
E. Henry, 397.
Ch. Hermite, 93, 431, 575.
Hilaire, 196, 436.
Hilbert, 64, 65.
Hirst, 286.
G. Humbert, 154, 478.
A. Hurwitz, 64, 144.
A. Hurwitz, 204.
Husquin de Rhéville, 154.
E. Jaggi, 367.
E. Jaggi, 367.
Jacobi, 364, 367, 370, 376, 431, 432.
Jamet, 154.
Janet, 547.
Jérabek, 448.
Jerrard, 179.
Joachimsthal, 480.
C. Jordan, 124, 574.
Karagiannidès, 539.
Kepler, 173, 516.

F. Klein, 137, 138.
Kœnigs, 510.
A. Kotelnikof, 138.
Kronecker, 65, 389, 390.
Kummer, 272.
Kuscow, 209.
E. Lacour, 266, 272, 341, 437, 499.
E. Lacour, 143, 144, 272.
Lagoutinsky, 149.
Lagrange, 510, 551, 554, 562, 564.
Laguerre, 93.
C.-A. Laisant, 99, 179, 180, 181, 186, 187, 188, 278.
C.-A. Laisant, 246, 277, 278, 280, 539.
Laplace, 281, 282.
L. Laugel, 6, 64, 201.
L. Laugel, 23.
H. Laurent, 244, 277.
H. Laurent, 205, 278.
Leau, 80.
Léauté, 539, 541.
Lecornu, 246.
Legendre, 22, 23, 145, 534.
E.-M. Lémeray, 75, 139, 534.
E.-M. Lémeray, 510.
E. Lemoine, 196.
E. Lemoine, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 92, 280.
H. Lez, 336, 386, 477.
H. Lez, 155, 196.
Lhuillier, 51, 52.
S. Lie, 22, 23, 137, 138, 282.
Lionnet, 180.
Liouville, 412, 541.
Lobatchefsky, 137, 138.
G. de Longchamps, 150.
Lucas, 154.
Maclaurin, 551.
Maillard, 150.
E. Malo, 128.
S. Mangeot, 215.
S. Mangeot, 333.
A. Mannheim, 244, 288, 291, 340.
A. Mannheim, 94, 106, 314, 316, 483.
Méray, 434, 574.
Meyer, 485.
Ch. Michel, 24.
G. Milhaud, 145, 146, 284.
H. Minkowski, 64, 65, 68, 69, 72.
Möbius, 195.
Möbius, 188.
J. Molk, 430, 574.
Monge, 453, 455, 460.
C. Moreau, 293.
E. Mougin, 283, 284.
P. Nasimof, 138.
Nester, 155.
J. Neuberg, 336, 448.
Nicomède, 257.
Noeggerath, 393.
M. d'Ocagne, 44, 47, 115, 244, 314.
M. d'Ocagne, 106, 155, 286, 483.
Onponale, 155.
H. Padé, 143, 312.
Pascal, 542, 543, 544, 545, 546, 579.
A. Pellet, 484.
Julius Petersen, 6, 23.
Julius Petersen, 179.
E. Picard, 245, 439.
H. Piccioli, 207.
G. Pirondini, 246.
G. Pirondini, 207.
Ph. du Plessis, 522.
Plücker, 356.
H. Poincaré, 93, 245.
Poinsot, 553.
J. Pomey, 118, 155.
L. Raffy, 243, 412.
L. Ravut, 118.
V. Retali, 286.
V. Retali, 155.
Reye, 422, 485.
Ribaucour, 154, 155.
Richelot, 187.

Riemann, 139, 140, 141, 281.
L. Ripert, 329, 333, 413, 446.
M. Roberts, 292.
M. Roberts, 190.
Rosanes, 485.
E. Rouché, 93, 533.
A. de Saint-Germain, 307.
A. de Saint-Germain, 114, 154.
Salmon, 341, 504.
N. Saltykof, 153.
V. Schlegel, 390.
E. Schou, 23.
P.-H. Schoute, 548.
Schröter, 75.
Schwarz, 433, 464.
D. Seiliger, 138.
J.-A. Serret, 208, 572.
P. Serret, 180.
Cl. Servais, 579.
Cl. Servais, 576.
D. Sintsof, 411.
D. Sintsof, 138.
P. Sondat, 190, 388.
T. Souvarof, 138.
Steiner, 75, 437, 439, 444, 445, 499, 502, 503, 547.
M. Stewart, 99.
Stoll, 395.
Strebor, 147.
Strebor, 181.
Sturm, 485.
Sylow, 22, 23.
Sylvester, 504.
J. Tannery, 141, 142, 277, 278, 279, 280, 430, 574.
G. Tarry, 47.
A. Thévenet, 52.
H.-E. Timerding, 351.
A. Tresse, 145.
Tschirnaüs, 179.
G. Tzitzéica, 148.
Unferdinger, 155.
A. Vassilief, 139.
Vicaire, 246.
H. Weber, 272, 572.
Weierstrass, 197, 226, 369, 383, 431, 432, 560, 562, 574.
E. Weill, 120.
M. Weill, 196.
White, 555.
Wilson, 302.
Wronski, 512.
Zeuthen, 23.

25212 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

